В. С. ЛЮТИКАС

ШКОЛЬНИКУ О ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие
по факультативному курсу
для учащихся 8—10 классов

*Рекомендовано
Министерством просвещения РСФСР*

ИЗДАНИЕ 2-е, ДОПОЛНЕННОЕ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1983

ББК 22.171я72
Л96

Лютикас В. С.

Л96 Школьнику о теории вероятностей: Учеб. пособие по факультативному курсу для учащихся 8—10 классов. — 2-е изд., доп. — М.: Просвещение, 1983.—127 с.

Цель данного пособия—понятно изложить самые элементарные сведения из теории вероятностей, научить юного читателя применять их при решении практических задач.

Л $\frac{4306020400-321}{103(03)-83}$ инф. письмо — 83

ББК 22.171я72
517.8(075)

СЛОВО К ЧИТАТЕЛЮ

Эта небольшая книга раскроет перед вами, если вы проявите достаточно желания и упорства, мир случайного. Собственно, мир остается таким, каков он есть, но показывается он не совсем с обычной стороны.

Оказывается, только пользуясь языком науки о случае — теории вероятностей, можно описать многие явления и ситуации.

Постепенно при чтении этой книги вы углубите свои знания в теории и сможете с ее помощью решать задачи практического содержания, к которым недавно не знали, как и подступиться. На этом этапе задачи объясняют, иллюстрируют теорию.

Понятно изложить самые элементарные сведения из теории вероятностей, научить юного читателя применять их при решении практических задач — такова основная цель, которую преследовал автор. А для того чтобы эта цель была достигнута, автор, не претендуя на оригинальность в математических рассуждениях, старался исходить из возможностей и интересов школьников.

Настоящее издание дополнено новым разделом о непрерывных случайных величинах и их характеристиках. В связи с введением в школьный курс математики понятия определенного интеграла оказалось возможным ознакомить учащихся с нормальным распределением и теоремой Ляпунова, имеющими важное значение в прикладных математических дисциплинах.

Автором использованы соответствующие книги по теории вероятностей для студентов: Б. В. Гнеденко «Курс теории вероятностей», Е. С. Вентцель «Теория вероятностей», Н. Я. Виленкин «Комбинаторика» и др.

Теория вероятностей, изложенная здесь, доступна ученику VIII—X классов, учащемуся техникума и каждому читателю, уже получившему среднее образование, но еще не успевшему забыть школьную математику.

Книга написана так, чтобы старшеклассник мог ею пользоваться как материалом для внеклассного чтения по математике и для подготовки к факультативным занятиям, а учитель как конспектом для проведения факультативных занятий по теории вероятностей.

Термин «Упражнения» здесь означает большее, чем просто набор учебных примеров для тренировки по усвоению прочитанного материала. В действительности здесь содержатся и некоторые задачи для размышлений, самостоятельного поиска.

I. КОЕ-ЧТО ИЗ ПРОШЛОГО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Еще первобытный вождь понимал, что у десятка охотников «вероятность» поразить копьем зубра гораздо больше, чем у одного. Поэтому и охотились тогда коллективно.

Неосновательно было бы думать, что такие древние полководцы, как Александр Македонский или Дмитрий Донской, готовясь к сражению, уповали только на доблесть и искусство воинов.

Несомненно, они на основании наблюдений и опыта военного руководства умели как-то оценить «вероятность» своего возвращения «со щитом» или «на щите», знали, когда принимать бой, когда уклониться от него. Они не были рабами случая, но вместе с тем они были еще очень далеки от теории вероятностей.

Позднее, с опытом, человек все чаще стал планировать случайные события — наблюдения и опыты, классифицировать их исходы как невозможные, возможные и достоверные. Он заметил, что случайностями не так уж редко управляют объективные закономерности. Вот простейший опыт — подбрасывают монету. Выпадение герба или цифры, конечно, чисто случайное явление. Но при многократном подбрасывании обычной монеты можно заметить, что появление герба происходит примерно в половине случаев[1]. Значит, результаты бросаний монеты, хотя каждое из них и является случайным событием, при неоднократном повторении подвластны объективному закону. Для тех, кто обладает склонностью к исследованиям, появляется соблазн накопить побольше таких закономерностей и попытаться построить из них теорию.

Рассмотрим другой, более сложный пример — эксперимент с так называемой доской Гальтона[2] (рис. 1). Доска размещена вертикально. Из верхнего резервуара стальные шарики катятся (на отдельных участках падают) вниз и накапливаются в нижних гнездах. Каждый шарик, встретив на своем пути очередное препятствие, отклоняется или влево или вправо, а затем падает вниз. Шарик, конечно, может попасть в любое из гнезд. Между тем правильное расположение шариков (симметричное,

[1] Кто и когда впервые проделал опыт с монетой, неизвестно. Естествоиспытатель Ж. Л. Л. Бюффон в восемнадцатом столетии 4040 раз подбрасывал монету — герб выпал 2048 раз. Математик К. Пирсон в начале нынешнего столетия подбрасывал ее 24 000 раз — герб выпал 12 012 раз. Лет 20 назад американские экспериментаторы повторили опыт. При 10 000 подбрасываниях герб выпал 4979 раз.

[2] У Ф. Гальтона (1822—1911) прибор выглядел значительно проще — доска со штифтами.

при котором в центральных гнездах их много, а в крайних мало), повторяющееся от эксперимента к эксперименту, убедительно свидетельствует о существовании объективного закона их распределения. Когда шариков много, то говорят, что они распределены по нормальному закону.

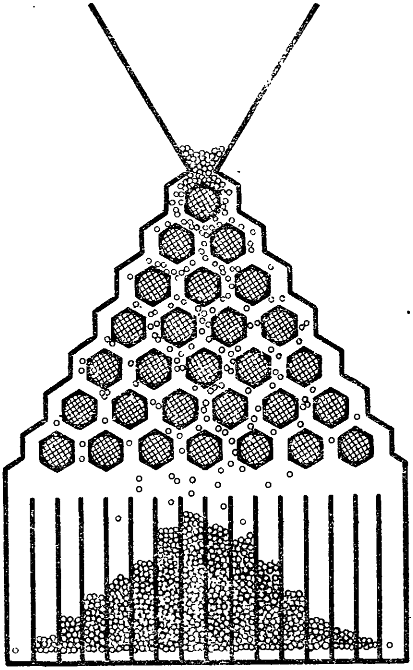

Рис. 1

Итак, случайности могут подчиняться относительно простым и более сложным закономерностям. Но, спрашивается, где же математика, где математические задачи?

Наиболее интересные для начинающих задачи теории вероятностей возникли в области азартных игр¹, хотя формированию основ теории вероятностей способствовали также выяснение длительности жизни, подсчет населения, практика страхования. Мы начнем, естественно, с простых задач.

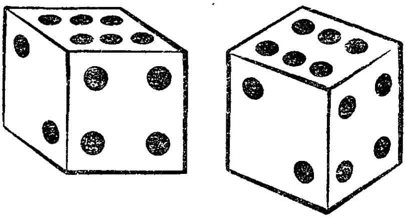

Рис. 2

К азартным играм относили бросание шестигранных игральных костей (рис. 2). Слово «азар» по-арабски означает трудный. Так, арабы называли азартной игрой комбинацию очков, которая при бросании нескольких костей могла появиться лишь единственным способом. Например, при бросании двух костей трудным («азар») считалось появление в сумме двух или двенадцати очков.

В 1494 году итальянский математик Л. Пачиоли (1445—1514) опубликовал энциклопедический труд по математике, где разбирал следующую ситуацию.

Два игрока договорились играть в кости до момента, когда одному из них удастся выиграть m партий. Но игра была прервана после того, как первый выиграл a ($a < m$), а второй — b ($b < m$) партий. Как справедливо разделить ставку?

---

¹ Этому, по-видимому, способствовало наличие таких «наглядных пособий», как монета или игральная кость.

Сам Пачиоли верного решения не нашел. Он предлагал разделить ставку в отношении $a : b$, не учитывая числа партий, которые нужно еще выиграть, чтобы получить всю ставку.

Спустя без малого пятьдесят лет другой итальянский математик Д. Кардано (1501—1576) подверг рассуждения Пачиоли справедливой критике, но и сам предложил ошибочное решение.

Прошло еще 100 с лишним лет, и в 1654 году задача была, наконец, решена в ходе переписки между двумя выдающимися французскими математиками Б. Паскалем (1623—1662) и П. Ферма (1601—1665).

Посмотрим, как решал Б. Паскаль задачу в случае $m = 3$, $a = 2$ и $b = 1$.

Допустим, что игра прервана, когда у игрока A две выигранные партии, а у игрока B — одна. Как делить ставку, пока неясно. Но все упростилось бы, если бы игроки сыграли еще одну партию. В самом деле:

1) если эту партию выигрывает игрок A, то он, как набравший заветное число $m = 3$ выигрышей, получает всю ставку;

2) если партию выиграет игрок B, то справедливо разделить всю ставку пополам, так как у каждого по две выигранные партии.

Возможности у каждого из этих исходов одинаковы.

Таким образом, A может выиграть всю ставку или $\frac{1}{2}$ ставки, т. е. в среднем[1]

$$\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

ставки.

У B возможности поскромнее: он может или ничего не выиграть, или выиграть $\frac{1}{2}$ ставки, т. е. в среднем

$$\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

ставки. Поэтому ставка должна быть разделена в отношении 3 : 1 (а не 2 : 1, как предлагал Пачиоли).

В 1718 году в Лондоне вышла в свет книга со странным по тем временам названием «Учение о случаях». Ее автор — французский математик А. Муавр (1667—1754). Самое большое его достижение — открытие закономерности, которая очень часто наблюдается в случайных явлениях. Он первым заметил и теоретически обосновал роль «нормального» распределения[2] (вспомните опыт Гальтона).

[1] Здесь мы сталкиваемся впервые с математическим ожиданием случайной величины. О том, что это такое, рассказывается в конце книги.

[2] Смысл понятия «распределение» будет раскрыт позже.

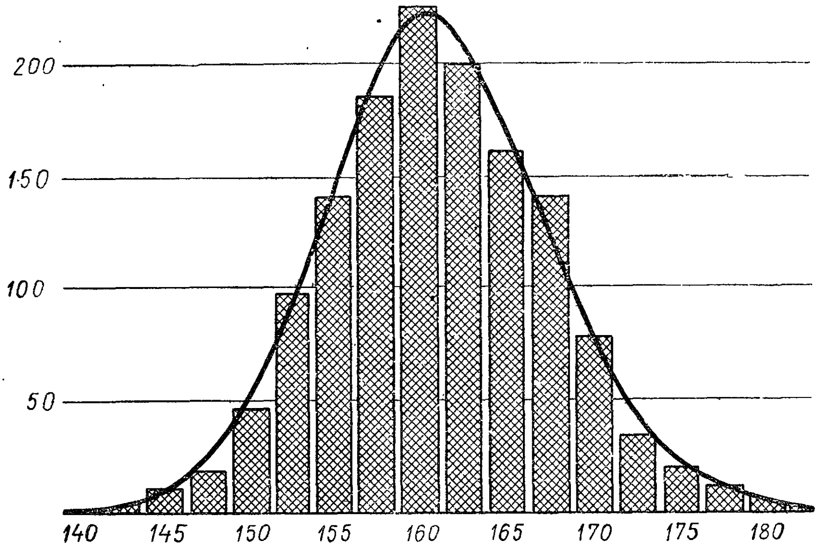

Рис. 3

Муавр измерил рост у 1375 случайно выбранных женщин. Результат схематически изображен на рисунке 3. Колоколообразная кривая, которая приближенно «накрывает» диаграмму распределения роста, близка к графику функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828 \ldots \qquad (1.1)$$

Закон нормального распределения имеет важное практическое значение. Оказывается, что так распределяется скорость газовых молекул, вес новорожденных и много других случайных событий физической и биологической природы.

Впервые основы теории вероятностей были изложены последовательно французским математиком П. Лапласом (1749—1827) в книге «Аналитическая теория вероятностей».

В предисловии автор писал: «Замечательно, что наука, которая началась с рассмотрения азартных игр, обещает стать наиболее важным объектом человеческого знания... Ведь по большей части важнейшие жизненные вопросы являются на самом деле лишь задачами из теории вероятностей».

П. Лаплас не мог предусмотреть, что пройдет несколько десятилетий и интерес к теории вероятностей снизится. А так на деле и случилось. Во второй половине XIX века и в начале XX века некоторые математики перестали интересоваться теорией вероятностей как математической дисциплиной.

Чем объясняется такое безразличие некоторых математиков к теории вероятностей? Причин много. Но здесь мы раскроем только одну.

Вероятность события была определена Лапласом так:

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.3}$$

где n — общее число равновозможных событий, а m — число тех событий, когда происходит нужный исход («благоприятствующее событие»). Например, пусть следует вычислить вероятность события A — «при бросании двух костей выпало 8 очков».

При бросании двух костей могут получиться следующие равновозможные результаты:

I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Как видно, всего возможных вариантов 36. Специально выделяются те случаи, когда произошло событие A. Таких случаев 5 — все они равновозможны. Если договориться вероятность события A обозначить $\boldsymbol{P}(A)$, то, следуя Лапласу, будем иметь

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{5}{36}.$$

Кажется, что все в порядке — к лапласовскому определению вероятности события никак не придраться. Но вот вопрос: когда и какие случайные события можно считать равновозможными?

Рождается ребенок. Мальчик или девочка — кажется, равновозможные события (одно из двух, как и при бросании монеты). Но оказывается, что статистика рождений не вполне согласуется с нашим «кажется».

Она может быть, например, такой:

	Год	Число родившихся детей	Число родившихся мальчиков	Число родившихся девочек	Частота рождения мальчиков
Польша	1927	958 733	496 544	462 189	0,518
Швеция	1935	88 273	45 682	42 591	0,517

Если в разное время в разных странах мальчиков рождается больше, чем девочек, значит, вероятности рождения мальчика или девочки неодинаковые: вероятность события «родился мальчик» больше $\frac{1}{2}$.

Вспомним о подбрасывании монеты (см. об этом на стр. 4). Откуда у нас уверенность, что вероятность выпадения герба, когда подбрасывание неограниченно повторяется, равна $\frac{1}{2}$?

Факты, обнаруживающие, что объективная реальность не обязательно совпадает с человеческим «кажется», послужили причиной сомнений в правомерности понятия «равновозможные события». Возникла потребность «перепроверять» вероятности, которые вычислялись по лапласовской формуле $P(A) = \frac{m}{n}$, экспериментами.

Эта «перепроверка» привела к следующей статистической оценке возможности появления события. Пусть в результате некоторого опыта может произойти или не произойти событие A. В ходе l опытов событие A произошло k раз. Тогда частотой события A называется

$$P_l\{A\} = \frac{k}{l}. \tag{1.4}$$

За вероятность события A ~~принимается постоянная величина~~, около которой группируются наблюдаемые значения частоты. Это определение вероятности называют статистическим.

Противоречия, которые проявились при оценке вероятности некоторого события и частоты того же события формулами (1.3) и (1.4), не могли понравиться многим математикам, которые заботились о строгости науки. Вместе с тем распространению «антивероятностных» взглядов способствовало опубликование ряда парадоксов[1]. Один из наиболее характерных парадоксов — парадокс Бертрана, в котором читатель разберется, если дочитает эту книгу до конца.

Стойко защищали позиции теории вероятностей русские математики. В 1846 году Петербургская Академия наук издала книгу В. Я. Буняковского (1804—1889) под названием «Основания математической теории вероятностей». Это был первый русский учебник по теории вероятностей. По нему учился и выдающийся русский математик П. Л. Чебышев. Хотя он по теории вероятностей написал не так уж много трудов, но все они сохраняют первостепенное значение вплоть до наших дней. Так называемое неравенство П. Л. Чебышева на веки веков вошло в сокровищницу математической науки.

Ученик П. Л. Чебышева А. А. Марков развил труды своего учителя. Ему принадлежит слава открывателя важной области приме-

[1] *Парадокс* — факт, по виду противоречащий здравому смыслу.

нения теории вероятностей — теории вероятностных, или стохастических, процессов.

Наследие русских математиков получило развитие в работах советских математиков Е. Е. Слуцкого (1880—1948), С. Н. Бернштейна (1880—1968), А. Я. Хинчина (1894—1959), Ю. В. Линника (1904—1972) и особенно академика А. Н. Колмогорова (род. в 1903 г.). Созданная А. Н. Колмогоровым советская школа теории вероятностей завоевала всеобщее признание и сегодня занимает ведущие позиции в мировой науке.

II. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1. СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

Если читатель внимательно прочел первый раздел книги, ему пришлось поразмышлять над такими терминами, как «вероятность», «случай», «событие». Для наглядности и доходчивости они иногда заменялись разными синонимами, но суть их не менялась. Оттенок они получили вполне определенный. Теперь пора договориться, что как назвать.

Подбрасываем монету. Появился герб. А ведь могла появиться и цифра. То, что появился герб, — случайное событие.

Охотник стрелял в волка. Попал. Но мог и не попасть (произошла осечка, подвел глаз, дрогнула рука). Попадание — событие случайное.

Школьник каждый вечер выходит на прогулку. Во время прогулки, в понедельник, он встретил трех знакомых. Конечно, это дело случая: он мог встретить только одного знакомого, четырех или вообще не встретить знакомых.

То, что он встретил именно трех, — случайное событие.

В этих примерах случайные события — последствия определенных действий или результаты наблюдений при реализации комплекса условий (подбрасывание монеты, выстрел, прогулка).

На основании только что разобранных примеров можно составить следующую характеристику случайного события.

Случайным событием называется такой исход эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти, а может и не произойти[1].

Кратко «случайные события» называют «событиями». Выделим два частных вида событий.

Проведем вначале (мысленно, разумеется) следующий эксперимент: стакан с водой перевернем дном вверх. Если этот опыт проводить не в космосе, а дома или в классе, то вода выльется. Это *достоверное* событие.

Достоверным событием называется такое событие, которое при реализации данного комплекса условий непременно произойдет.

[1] В аксиоматике теории вероятностей понятие случайного события не является первичным, а строится из более элементарных понятий; как увидим, случайные события — подмножества множества элементарных случайных событий.

Произведено три выстрела по мишени. «Произошло пять попаданий» — невозможное событие.

Бросаем камень вверх. Камень остается висеть в воздухе — невозможное событие.

Буквы слова «антагонизм» наугад переставляем. Получится слово «анахронизм» — *невозможное* событие.

Невозможным событием называется такое событие, которое заведомо не может произойти при реализации данного комплекса условий.

Случайные события принято обозначать большими буквами латинского алфавита A, B, C с индексами или без них[1]. Достоверное событие будем обозначать U, невозможное — V. Надеясь, что читатель разобрался в терминологии, предлагаем ему несколько упражнений для ее усвоения.

Упражнения

1. Какие из следующих событий достоверные:
   A — «два попадания при трех выстрелах»,
   B — «появление не более 18 очков при бросании трех игральных костей»,
   D — «наугад выбранное трехзначное число не больше 1000»,
   E — «наугад выбранное число, составленное из цифр 1, 2, 3 без повторений, меньше 400»?
2. Какие из следующих событий невозможные:
   A — «опаздывание ленинградского экспресса в субботние дни»,
   B — «появление 17 очков при бросании 3 игральных костей»,
   C — «появление слова «мама» при случайном наборе букв а, а, м, м»,
   D — «появление составленного из цифр 1, 2, 3, 7, 8 и кратного 9 числа при случайном однократном наборе указанных цифр»,
   E — «появление составленного из цифр 1, 2, 3, 7, 8 и кратного 3 числа при произвольном однократном наборе указанных цифр»?
3. Укажите достоверные и невозможные события:
   A — «появление не более 12 очков при однократном бросании двух игральных костей»,
   B — «появление сразу 3 лайнеров над аэропортом»,
   C — «попадание в мишень при 3 выстрелах»,
   D — «появление в окошке счетчика трехзначного числа, составленного из цифр 1, 2, 3 и кратного 5».

---

[1] Некоторые из больших букв латинского алфавита, как увидим дальше, имеют фиксированные значения. Среди них E, D, M и другие.

Допустим, что при бросании игральной кости нас интересует появление определенного числа очков.

Выпадение конкретного числа очков i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ мы назовем элементарным событием и обозначим e_i.

Осуществление одного элементарного события в качестве результата испытания, очевидно, исключает реализацию других.

Ясно, что при бросании игральной кости непременно произойдет одно из элементарных событий:

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6.$$

Будем считать, что все эти элементарные события образуют множество элементарных событий E; E — достоверное событие (по определению).

Рассмотрим события:

1) A — «появление четного числа очков при бросании игральной кости». Этому событию благоприятствуют элементарные события e_2, e_4, e_6. Разумеется, множество этих событий является подмножеством E,

2) B — «появление числа очков не больше четырех». Этому событию благоприятствует подмножество множества элементарных событий E:

$$e_1,\quad e_2,\quad e_3,\quad e_4,$$

3) C — «появление числа очков, которое делится на 3».

Этому событию благоприятствует подмножество множества элементарных событий E:

$$e_3,\ e_6.$$

Таким образом, событие A может быть представлено подмножеством элементарных событий (e_2, e_4, e_6), событие B — подмножеством элементарных событий (e_1, e_2, e_3, e_4), а событие C — подмножеством элементарных событий (e_3, e_6).

Представляя события как подмножества множества элементарных событий, обозначим A (e_2, e_4, e_6), B (e_1, e_2, e_3, e_4), C (e_3, e_6).

Бросаем монету. Событие $Г$ — «появление герба» и событие $Ц$ — «появление цифры» тоже образуют множество элементарных событий.

Если события A, B и C можно сравнить в смысле возможности их появления, то сравнение, например, событий A и $Г$ смысла не имеет, потому что они представляются подмножествами разных множеств элементарных событий.

3. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ

Сравним следующие события:

A — «появление двух очков при бросании игральной кости»,

B — «появление четного числа очков при бросании игральной кости».

Замечаем следующее отношение между событиями: если произошло A, то тем самым произошло и B. Тот факт, что «A влечет за собой B» (или «B является следствием A»), запишем:

$$A \subset B \quad \text{или} \quad B \supset A. \tag{2.1}$$

Событие A является частью события B, поскольку событие B состоит в осуществлении трех элементарных событий: «появление 2 очков», «появление 4 очков», «появление 6 очков», а событие A — одним из них — «появлением 2 очков».

Представление событий подмножествами множества элементарных событий может быть осуществлено в геометрической форме (рис. 4).

Сопоставим события:

A — «появление герба при подбрасывании монеты»,

B — «непоявление цифры при подбрасывании монеты».

Если же монета не может укатиться и застрять в щели пола или встать на ребро, тогда если произошло A, то произошло и B и в то же время если произошло B, то произошло и A. (В символической записи $A \subset B$ и $B \subset A$.) Тогда запишем: $A = B$ и будем говорить, что события A и B равносильны.

Еще раз подчеркиваем, что A будет частью события B только в том случае, когда элементарные события, представляющие событие A, принадлежат подмножеству элементарных событий, представляющих событие B.

Пусть имеем множества элементарных событий:

1) появление герба и появление цифры при подбрасывании монеты;

2) появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при бросании игральной кости;

3) появление шаров с номерами 1, 2, 7 при вынимании одного шара из ящика, содержащего 10 перенумерованных от 1 до 10 одинаковых шаров.

Для каждого из множеств характерно, что ни одно из его элементарных событий не является объективно более возможным, чем другое. Такие события называются *равновозможными*.

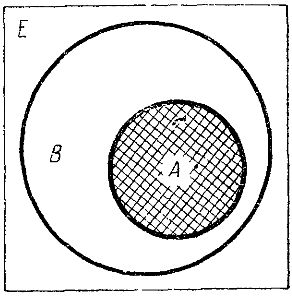

Рис. 4

Упражнения

4. Какие из событий являются частью другого события:

а) A — «попадание в мишень первым выстрелом»,

B — «попадание в мишень по меньшей мере одним из 4 выстрелов»,

C — «попадание точно в мишень одним из 2 выстрелов»,

D — «попадание в мишень не более, чем 5 выстрелами»;

б) A — «появление 3 очков при бросании игральной кости»,

B — «появление не более 3 очков при бросании игральной кости»,

C — «появление не более 4 очков при бросании игральной кости»?

4. ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Мы уже убедились в том, что между событиями соблюдаются отношения, аналогичные отношениям «больше», «меньше» или «равно», как и между числами.

Теперь естественно ввести и операции над событиями.

Сложение

По мишени произведено 4 выстрела. Рассмотрим события:

A_0 — «попаданий нет»;

A_1 — «одно попадание»;

A_2 — «два попадания»;

A_3 — «три попадания»;

A — «не больше трех попаданий».

Разумеется, $A_0 \subset A$, $A_1 \subset A$, $A_2 \subset A$, $A_3 \subset A$.

Вместе с тем событие A не содержит никаких других событий, кроме A_0, A_1, A_2, A_3. Поэтому естественно событие A считать суммой событий A_0, A_1, A_2, A_3.

Суммой событий A_1, A_2, A_3, ..., A_n называется событие A, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, A_3, ..., A_n (или A_1, или A_2, ..., или A_n, или нескольких из них, или всех).

Символически:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n. \tag{2.3}$$

Рассмотрим три события:

A — «появление одного очка при бросании игральной кости»,

B — «появление двух очков при бросании игральной кости»,

C — «появление не больше двух очков при бросании игральной кости».

Нетрудно заметить, что событие C является следствием A или B, поэтому $C = A + B$.

Ясно, что события A и B не могут произойти одновременно.

Поэтому, представляя их разными секторами круга, получаем следующее графическое изображение события $C = A + B$ (рис. 5). Приведем теперь графическое представление суммы событий:

A — «появление больше чем 4 очка при бросании игральной кости»,

B — «появление больше чем 3 очка и меньше чем 6 очков при бросании игральной кости»,

C — «появление больше чем 3 очка при бросании игральной кости».

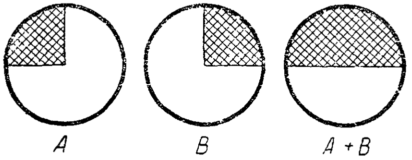

Рис. 5

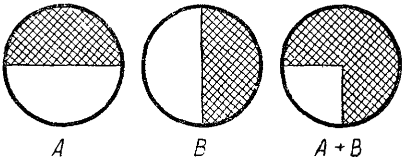

Рис. 6

Ясно, что $C = A + B$. Так как событию A соответствует «появление или 5, или 6 очков», а событию B — «появление или 4, или 5 очков», то, изображая эти события разными полукругами, получаем иное представление события $C = A + B$ (рис. 6). То, что в рисунке суммы $A + B$ одна четверть круга принадлежит и событию A и событию B, не является случайностью: частью обоих этих событий является событие «появление 5 очков».

События A и B могут быть подмножествами одного и того же множества элементарных событий E следующим образом: $A\ (e_5,\ e_6)$, $B\ (e_4,\ e_5)$. Тогда сумма этих событий $A + B$ представляется объединением этих подмножеств (e_4, e_5, e_6). Вообще, если событие A представлено подмножеством A^* множества элементарных событий E, а событие B — подмножеством B^* того же множества элементарных событий, то сумма $A + B$ будет представлена объединением $A^* \cup B^*$.

Графическое представление суммы событий позволяет установить следующие закономерности[1]:

1) $A + B = B + A$;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$. (2.4)

Упражнения

5. Событие A — «попадание в мишень первым выстрелом», событие B — «попадание в мишень вторым выстрелом».

В чем состоит событие $A + B$?

6. Событие A — «лотерейный выигрыш 10 руб.», событие B — «лотерейный выигрыш 20 руб.», событие C — «лотерейный выигрыш 25 руб.».

В чем состоит событие $A + B + C$?

7. Событие A — «лотерейный выигрыш 1 руб.», событие B — «лотерейный выигрыш 2 руб.», событие C — «лотерейный выигрыш 3 руб.», событие D — «лотерейный выигрыш 4 руб.».

В чем состоит событие $A + B + C + D$?

8. Событие A — «появление двух гербов при подбрасывании двух монет».

---

[1] Доказав эти и другие равенства для событий A, B, C, являющихся подмножествами множества элементарных событий, можем не возвращаться при решении конкретных задач всякий раз к рассмотрению элементарных событий.

Событие B — «появление герба и цифры при подбрасывании двух монет».

В чем состоит событие $A + B$?

9. Событие A_1 — «поражение мишени одним выстрелом», событие A_2 — «поражение мишени двумя выстрелами», событие A_3 — «поражение мишени тремя выстрелами»,

. . . .

. . . .

событие A_{100} — «поражение мишени сотней выстрелов».

В чем состоит событие $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{100}$?

10. Событие A — «появление 6 очков при бросании игральной кости»,

событие B — «появление 5 очков при бросании игральной кости»,

событие C — «появление 4 очков при бросании игральной кости».

В чем состоит событие $A + B + C$?

11. Выясните смысл событий $U + U$, $V + V$, $U + V$.

Умножение

Произвольно выбираем два двузначных числа. Определяем события:

A — «выбранные числа кратны 2»,

B — «выбранные числа кратны 3»,

C — «выбранные числа кратны 6».

Событие C происходит, если одновременно происходят события A и B. Если одно из событий A или B не произойдет, то не произойдет и C. Принято такое событие C называть произведением событий A и B.

В общем случае произведение событий определяется так:

Произведением событий A_1, A_2, A_3, ..., A_n называется событие A, состоящее в одновременном исполнении всех (и A_1, и A_2, и A_3, ..., и A_n) событий A_1, A_2, A_3, ..., A_n.

Символически:

$$A = A_1 A_2 A_3 \ldots A_n. \tag{2.5}$$

Рассмотрим еще пример:

A — «входящий в подъезд человек — мужчина»,

B — «входящий в подъезд человек светловолосый»,

C — «входящий в подъезд человек — светловолосый мужчина».

Событие C происходит только при одновременном исполнении событий A и B, поэтому $C = AB$.

Пусть события A и B представлены подмножествами одного и того же множества элементарных событий E так: A (e_1, e_2, e_3), B (e_2, e_3, e_4).

Тогда произведение AB будет представлено пересечением этих подмножеств $A \cap B = \{e_2, e_3\}$.

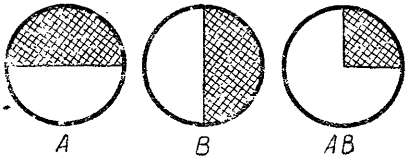

Рис. 7

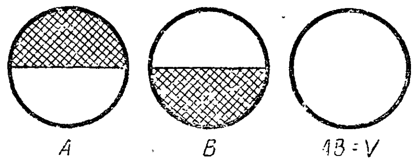

Рис. 8

Вообще, если событие A представлено подмножеством A^* множества элементарных событий E, а событие B — подмножеством B^* того же самого множества элементарных событий, то произведение AB будет представлено пересечением $A^* \cap B^*$.

Изображая события A и B разными полукругами, получим следующую геометрическую интерпретацию события $C = AB$ (рис. 7).

Сравнивая события

A — «появление герба при первом бросании монеты»,

B — «появление цифры при первом бросании монеты», выясняем, что совместное осуществление этих событий невозможно.

Символически это записываем так:

$$AB = V. \tag{2.6}$$

Геометрическая интерпретация приведена на рисунке 8.

Два события A и B, произведение которых — невозможное событие ($AB = V$), называются несовместимыми событиями.

Произведение несовместимых событий представляется пустым множеством. Для таких событий A и B определение суммы событий формулируется так:

Суммой двух несовместимых событий A и B называется событие C, осуществляющееся в появлении либо события A, либо события B.

Разберемся в таких событиях:

A_1 — «появление одного очка при бросании игральной кости»,

A_2 — «появление двух очков при бросании игральной кости»,

A_3 — «появление трех очков при бросании игральной кости»,

A — «появление не больше трех очков при бросании игральной кости».

Имеют место следующие зависимости:

$$1)\ A = A_1 + A_2 + A_3; \quad 2)\ A_1A_2 = V;\ A_1A_3 = V;\ A_2A_3 = V.$$

Если события A_1, A_2, A_3 и A удовлетворяют условиям (1) и (2), то событие A составлено из событий A_1, A_2, A_3.

Рассмотрим следующие пары событий:

$\begin{cases} A_1 \text{ — «выпадение герба при подбрасывании монеты»,} \\ A_2 \text{ — «невыпадение герба при подбрасывании монеты»,} \end{cases}$

$\begin{cases} B_1 \text{ — «выздоровление больного»,} \\ B_2 \text{ — «невыздоровление больного»,} \end{cases}$

$\begin{cases} C_1 \text{ — «появление новой кометы в текущем году»,} \\ C_2 \text{ — «непоявление новой кометы в текущем году».} \end{cases}$

Естественно, события в каждой из пар считать противоположными.

Установим два свойства, которым удовлетворяет любая из этих пар событий:

1. Сумма событий каждой пары — достоверное событие:

$$A_1 + A_2 = U,$$
$$B_1 + B_2 = U,$$
$$C_1 + C_2 = U.$$

2. Произведение событий каждой пары — невозможное событие:

$$A_1A_2 = V,$$
$$B_1B_2 = V,$$
$$C_1C_2 = V.$$

Теперь можно ввести определение:

Если сумма событий A и B — достоверное событие, а произведение — невозможное событие, события A и B называются противоположными.

Если A и B — противоположные события, то символически записываем это так:

$$A = \overline{B}, \text{ или } B = \overline{A}.$$

Тогда $A\overline{A} = V$, а $A + \overline{A} = U$.

Упражнения

12. Событие A — «попадание первым выстрелом»,
событие B — «попадание вторым выстрелом».

В чем состоит событие AB?

13. Событие A — «появление нечетного числа очков при бросании игральной кости»,
событие B — «непоявление 3 очков при бросании игральной кости»,
событие C — «непоявление 5 очков при бросании игральной кости».

В чем состоят события ABC, AB, AC и BC?

14. Докажите: $UV = V$.

15. Событие A_1 — «появление четного числа очков при бросании игральной кости»,
событие A_2 — «появление 2 очков при бросании игральной кости»,
событие A_3 — «появление 4 очков при бросании игральной кости»,
событие A_4 — «появление 6 очков при бросании игральной кости».

Докажите:

1) $A_1\overline{A}_4 = A_2 + A_3$;
2) $A_2A_3 = V$;
3) $A_1A_2 = A_2$;
4) $A_1\overline{A}_3\overline{A}_4 = A_2$;
5) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 = A_4$;
6) $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4 = V$.

16. Докажите: $AA = A$.

17. Рассмотрев конкретные события A, B, C, убедитесь в том, что:

$$AB = BA;$$
$$A(BC) = (AB)C;$$
$$A(B + C) = AB + AC;$$
$$A + BC = (A + B)(A + C);$$
$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B};$$
$$\overline{A + B} = \overline{A}\overline{B};$$
$$(A + B)(A + C)(B + C) = AB + AC + BC.$$

18. Наудачу отобранная деталь может оказаться или первого сорта (событие A), или второго (событие B), или третьего (событие C). В чем состоят события:

$$A + B;\ A + C;$$
$$AC;$$
$$AB + C?$$

19. При каких условиях имеет место:

а) $A + B = AB$; б) $A + \overline{A} = A$; в) $A\overline{A} = A$?

20. Справедливы ли равенства:

а) $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A + B}$;
б) $\overline{A + B + C} = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$;
в) $\overline{A + B + C} = \overline{ABC}$?

21. Упростите выражения:

а) $(A + B)(A + \overline{B})$;
б) $(A + B)(B + C)(C + A)$;
в) $(A + B)B + A(AB)$.

22. Пусть A, B и C — случайные события, выраженные подмножествами одного и того же множества элементарных событий. Запишите такие события:

а) произошло только A;
б) произошло одно и только одно из данных событий;
в) произошло два и только два из данных событий;
г) произошли все три события;
д) произошло хотя бы одно из данных событий;
е) произошло не более двух событий.

Вычитание

Будем рассматривать события:

A — «наугад остановленный мужчина — брюнет»,

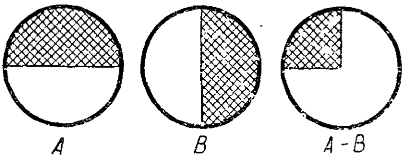

Рис. 9

B — «наугад остановленный мужчина — высокого роста»,

C — «наугад остановленный мужчина — невысокий брюнет».

Нетрудно заметить, что событие C означает то, что произошло A, но не произошло B. Принято такое событие C считать разностью событий A и B.

Вообще *разностью событий A и B называется событие C, состоящее в том, что произошли те элементарные события, которые входят в A, но не входят в B.*

В таком случае пишем:

$$C = A - B. \tag{2.7}$$

Если это определение выразить символами уже известных вам соотношений, то

$$A - B = A\bar{B}. \tag{2.8}$$

Пусть события A и B представлены подмножествами одного и того же множества элементарных событий E, $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ и $B = \{e_2, e_4\}$. Тогда разность событий $A - B$ представляется подмножеством $\{e_1, e_3\}$.

Геометрически разность событий изображена на рисунке 9.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача. Пусть A, B и C — события. Доказать, что $A(B - C) = AB - AC$.

На языке теории множеств $\alpha \in A(B - C)$. Получим отсюда как следствие, что

$$\alpha \in A(B - C);$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha \in A,\ \alpha \in B - C;$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha \in A,\ \alpha \in B,\ \alpha \notin C;$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha \in AB,\ \alpha \notin AC;$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha \in AB - AC.$$

Теперь пусть $\alpha \in AB - AC$. Приведем рассуждения в обратном порядке:

$$\alpha \in AB - AC;$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha \in AB,\ \alpha \notin AC;$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha \in A,\ \alpha \in B,\ \alpha \notin C;$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha \in A,\ \alpha \in B - C;$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha \in A(B - C).$$

Следовательно, равенство $A(B - C) = AB - AC$ действительно имеет место, поскольку множества $A(B - C)$ и $AB - AC$ состоят из одних и тех же элементарных событий.

Упражнения

23. Событие A — «попадание в мишень»,
событие B — «попадание в мишень первым выстрелом».
В чем состоит событие $A - B$?
24. Событие A — «получение достаточной для сдачи экзамена оценки»,
событие B — «получение пятерки».
В чем состоят события $A - B$, $A - \overline{B}$, $\overline{A} - B$, $\overline{A - B}$ и $\overline{A} - \overline{B}$?
25. Докажите, что
$$(A - C)(B - C) = AB - C,$$
$$A - (B + C) = (A - B) - C. \tag{2.9}$$
26. Событие A — «появление 3 очков при бросании игральной кости»,
событие B — «появление нечетного числа очков»,
событие C — «появление не больше 5 очков».
В чем состоит событие $AB - C$?
27. Докажите, что $A - BC = (A - C) + (A - B)$; $(A - B) + C = ((A + C) - B) + BC$; $(A - B) - (C - D) = (A - (B + C)) + (AD - B)$.

5. ПОЛНАЯ ГРУППА СОБЫТИЙ

Пусть имеем события:
A — «появление четного числа очков при бросании игральной кости»,
B — «появление нечетного числа очков при бросании игральной кости»,
C — «появление 5 очков при бросании игральной кости»,
D — «появление 2 очков при бросании игральной кости».

Ясно, что при бросании игральной кости хотя бы одно из упомянутых событий непременно произойдет, т. е. $A + B + C + D = U$. Введем понятие «полная группа событий».

Если сумма событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ — достоверное событие
$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = U, \tag{2.10}$$
то говорим, что события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ образуют полную группу событий.

Множество элементарных событий есть полная группа событий.

Пусть имеем события:

A_1 — «появление 1 очка при бросании игральной кости»,
A_2 — «появление 2 очков при бросании игральной кости»,
A_3 — «появление 3 очков при бросании игральной кости»,
A_4 — «появление 4 очков при бросании игральной кости»,
A_5 — «появление 5 очков при бросании игральной кости»,
A_6 — «появление 6 очков при бросании игральной кости».

Нетрудно заметить, что эти события образуют *полную группу* событий, ибо $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = U$.

Но, кроме этого свойства, они обладают еще одним: эти события *попарно несовместимы*, т. е. $A_1A_2 = V$, $A_1A_3 = V$, $A_1A_4 = V$, $A_1A_5 = V$, $A_1A_6 = V$, $A_2A_3 = V$, $A_2A_4 = V$, $A_2A_5 = V$, $A_2A_6 = V$, $A_3A_4 = V$, ..., $A_5A_6 = V$.

Вообще, если события A_1, A_2, ..., A_n обладают следующими двумя свойствами:

1) $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$; 2) $A_i \cdot A_k = V$ при $i \neq k$,

то они образуют *полную группу попарно несовместимых событий*.

Упражнения

28. Образуют ли полные группы событий следующие события:

а) A_1 — «появление герба при подбрасывании монеты»,
A_2 — «появление цифры при подбрасывании монеты»;

б) B_1 — «появление гербов при подбрасывании двух монет»,
B_2 — «появление цифр при подбрасывании двух монет»;

в) в цель выпущено два выстрела. Известно, что:
A_0 — «попаданий нет»,
A_1 — «попадание одно»,
A_2 — «попадания два»;

г) в цель выпущено два выстрела. Известно, что:
C_1 — «попадания не менее одного»,
C_2 — «промаха не менее одного»?

29. В каких пунктах задачи 28 представлены полные группы попарно несовместимых событий?

30. Какие из следующих событий несовместимые:

а) A_1 — «появление герба при подбрасывании монеты»,
A_2 — «появление цифры при подбрасывании монеты»;

б) B_1 — «появление герба при подбрасывании первой из двух монет»,
B_2 — «появление цифры при подбрасывании второй из двух монет»?

31. Придумайте три события, которые образовали бы полную группу несовместимых событий.

III. НАУКА О ПОДСЧЕТЕ ЧИСЛА КОМБИНАЦИЙ — КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих заданному множеству. Иногда комбинаторику рассматривают как введение в теорию вероятностей, поскольку методы комбинаторики очень помогают в теории вероятностей осуществить подсчет числа возможных исходов и числа благоприятных исходов в разных конкретных случаях.

В теории вероятностей принято говорить не о комбинациях, а о выборках. Поэтому мы будем придерживаться термина «выборка».

В комбинаторике рассматриваются виды выборок — перестановки, размещения, сочетания. Как увидим дальше, выборки могут в отличие от множеств включать повторно тот или иной элемент.

1. ОБЩИЕ ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ

Рассмотрим два общих правила, с помощью которых решается большинство задач комбинаторики, — правило суммы и правило произведения.

Допустим, в ящике имеется n разноцветных шариков. Произвольным образом вынимаем один шарик. Сколькими способами можно это сделать? Конечно, n. Теперь эти n шариков распределим по двум ящикам: в первом — m шариков, во втором — k. Произвольно из какого-нибудь ящика вынимаем один шарик. Сколькими разными способами можно это сделать? Из первого ящика шарик можно вынуть m разными способами, из второго — k разными способами. Всего $n = m + k$ способами. (3.1)

Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а объект B — k способами (не такими, как A), то объект «либо A, либо B» можно выбрать $m + k$ способами.

Это так называемое правило суммы.

Перейдем к правилу произведений. Рассмотрим следующую задачу.

Задача. Сколько можно записать двузначных чисел в десятичной системе счисления?

Поскольку число двузначное, число десятков может принимать одно из девяти значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Число единиц может принимать те же значения и может, кроме того, быть равным нулю.

Если цифра десятков 1, цифра единиц может быть 0, 1, 2, . . . — всего 10 значений. Если цифра десятков — 2, то вновь цифра единиц может быть равна 0, 1, 2, ... Всего получаем 90 двузначных чисел.

Обобщим полученный результат. Пусть данное множество из $n = m + k$ элементов разбито на два подмножества, состоящие соответственно из m и k элементов. Пусть из подмножества, содержащего m элементов, выбирается один элемент и независимо из подмножества, содержащего k элементов, выбирается один элемент. Спрашивается, сколько различных пар элементов при этом образуется?

Ответ на поставленный вопрос дает таблица.

$$\left.\underbrace{\begin{matrix} a_1b_1; & a_1b_2; & a_1b_3; & \ldots; & a_1b_k \\ a_2b_1; & a_2b_2; & a_2b_3; & \ldots; & a_2b_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_mb_1; & a_mb_2; & a_mb_3; & \ldots; & a_mb_k \end{matrix}}_{k \text{ пар в каждой строке.}}\right\} m \text{ строк}$$

Таким образом, если общее число всевозможных пар обозначим N, то

$$N = mk. \tag{3.2}$$

Сформулируем теперь правило произведений.

Если объект A можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) k способами, то пары объектов A и B можно выбрать mk способами.

2. ВЫБОРКИ ЭЛЕМЕНТОВ

Пусть имеем некоторое множество из n элементов $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Из этого множества можно образовать разные выборки[1], каждая из которых имеет r элементов

$$(0 < r \leqslant n).$$

Выборки могут быть упорядоченными — размещениями. Например, из элементов a, b и c можно образовать такие выборки-*размещения* по 2 элемента:

$$\begin{matrix} ab, & ba, & ca, \\ ac, & bc, & cb. \end{matrix}$$

Этих выборок 6, и они одна от другой отличаются либо элементами, либо их порядком.

Попробуем из 4 элементов a, b, c и d образовать подобные выборки по 3. Вот они:

$$\begin{matrix} abc, & bac, & cab, & dab, \\ abd, & bad, & cba, & dba, \\ acb, & bca, & cad, & dac, \\ adb, & bda, & cda, & dca, \\ acd, & bcd, & cbd, & dbc, \\ adc, & bdc, & cdb, & dcb. \end{matrix}$$

Всего 24 выборки. В обоих примерах мы имеем дело с выборками, которые называются *размещениями*. В первом случае мы имеем дело с размещениями из 3 элементов по 2, во втором — из 4 по 3.

Размещениями из n элементов по m называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элемен-

[1] Не всякая выборка является множеством (и может быть поэтому подмножеством). Далее нам встретятся выборки с повторениями, они множествами не являются.

тов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m договоримся обозначать A_n^m. Попробуем определить это число.

Пусть имеем n элементов. Первый элемент можно выбрать n способами. Второй приходится выбирать из оставшихся $n - 1$ элементов, поэтому второй элемент можно выбрать $n - 1$ способом. Тогда по формуле (3.2) пары двух элементов можно образовать $n(n - 1)$ способами. Третий элемент придется отбирать из числа оставшихся $n - 2$ элементов. Это можно сделать $n - 2$ способами. Тогда опять по формуле (3.2) тройки элементов можно образовать $n(n - 1)(n - 2)$ способами. Аналогично четверки можно образовать $n(n - 1)(n - 2)(n - 3)$ способами, а размещения по m элементов $n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - (m - 1))$ способами. Таким образом,

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \ldots (n-m+1). \qquad (3.3)$$

С помощью этой формулы решим следующую задачу.

Задача. Допустим, в высшей лиге по футболу 18 команд. Борьба идет за золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами медали могут быть распределены между командами?

Ясно, что нужно найти число размещений A_{18}^3. По формуле (3.3)

$$A_{18}^3 = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896.$$

Если кто-то в начале сезона, не зная, как укомплектованы и подготовлены команды, ручается, что золотые медали будут у киевских динамовцев, серебряные — у араратовцев, а бронзовые — у московских спартаковцев, то он смельчак — называет одну комбинацию из 4896 возможных. (Возможны случаи, когда команды делят места.)

Если в формуле (3.3) $m = n$, то A_n^n — число таких размещений, которые отличаются только порядком расположения элементов, но не самими элементами. Такие размещения называются *перестановками*. Их число по формуле (3.3)

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! = P_n.$$

$$P_n = A_n^n = n! \qquad (3.4)$$

Число n может принимать не только натуральные значения, оно может также равняться нулю. Пустое множество (выборка) является подмножеством любого множества, и естественно считать, что оно может быть упорядочено только одним способом. Принято считать, что $0! = 1$.

На практике не всегда важен порядок расположения в выборках. Например, если в полуфинале первенства СССР по шахматам участвуют 20 шахматистов, а в финал из них попадут только трое, то участнику безразлично (если им не руководят соображения престижа), какое из первых трех мест занять. Ведь были случаи, когда занявший третье место в полуфинале в финале был первым.

Если требуется установить, сколькими способами может образоваться финальная тройка, то надо посчитать только те выборки из 20 элементов по 3, которые одна от другой отличаются хотя бы одним элементом.

Вы, конечно, узнали в неупорядоченных выборках сочетания. Напомним, что число *сочетаний*[1] из n элементов по m обозначается

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}. \qquad (3.5)$$

Применяя эту формулу для решения задачи о шахматистах, получим число возможных финальных троек

$$C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140.$$

Формулы (3.3), (3.4) и (3.5) могут быть применены для определения числа случайных событий — результатов испытаний или наблюдений.

Примеры

1. На тренировках занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано тренером разных стартовых пятерок?

Так как при составлении стартовой пятерки тренера интересует только состав пятерки, то достаточно определить число сочетаний из 12 элементов по 5

$$C_{12}^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792.$$

2. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей (рис. 10) так, чтобы они не могли взять друг друга?

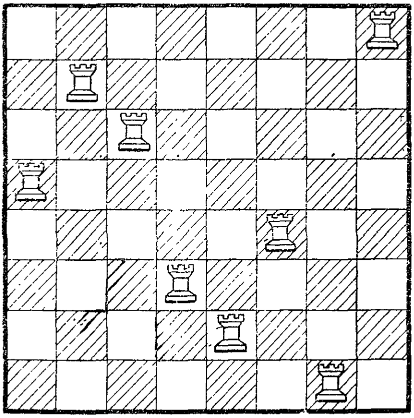

Рис. 10

Ясно, что в этом случае на каждой горизонтали и каждой вертикали шахматной доски может быть расположено только по одной ладье. Число возможных позиций — число перестановок из 8 элементов:

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \times 2 \cdot 1 = 40\,320.$$

3. Для полета на Марс необходимо укомплектовать следующий экипаж космического корабля: командир корабля, первый

---

[1] Значения C_n^m даны в таблице 1.

его помощник, второй помощник, два бортинженера и один врач. Командующая тройка может быть отобрана из числа 25 готовящихся к полету летчиков, два бортинженера — из числа 20 специалистов, в совершенстве знающих устройство космического корабля, и врач — из числа 8 медиков. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж исследователей космоса?

При выборе командира и его помощников важно определить, какой из военных летчиков лучше других справляется с теми или иными функциями в управлении кораблем. Значит, здесь важен не только персональный состав командующей тройки, но и соответствующая расстановка подобранных людей. Поэтому ясно, что командующая тройка может быть укомплектована A_{25}^3 способами.

Обязанности у обоих бортинженеров примерно одинаковые. Они могут выполнять их по очереди. Следовательно, пара бортинженеров может быть укомплектована C_{20}^2 способами. Аналогичное положение и с врачом — его можно подобрать C_8^1 способами.

В силу формулы (3.2) весь экипаж может быть укомплектован

$$A_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_8^1 = 20\ 976\ 000$$

способами.

Упражнения

32. В кружке юных математиков 25 членов. Необходимо избрать председателя кружка, его заместителя, редактора стенгазеты и секретаря. Сколькими способами можно образовать эту руководящую четверку, если одно лицо может занимать только один пост?

33. Школьная комсомольская организация, в которой насчитывается 150 членов, выбирает 6 делегатов на районную конференцию. Сколькими способами может быть избрана эта шестерка?

34. Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 при условии, что ни одна цифра не повторяется?

35. В одной арабской сказке речь идет о такой задаче. Вокруг костра сидят 12 разбойников. Каждый из них смертельно ненавидит двух ближайших соседей. С целью спрятать награбленное необходимо выделить пять разбойников. Сколькими способами атаман может назначить пятерых так, чтобы между ними не было распри?

36. В колоде 32 карты. Раздаются 3 карты. Сколько может быть случаев появления одного туза среди розданных карт?

37. В пионерском отряде 4 звена по 8 пионеров. Выбираются 4 делегата на дружинный сбор. Что можно сказать о числе случаев избрания в делегаты хотя бы одного представителя первого отряда?

38. Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, если цифры могут повторяться?

39. Укротителю диких зверей предстоит вывести на арену цирка один за другим 5 львов и 4 тигров. Сколькими способами он может сгруппировать зверей так, чтобы ни разу два тигра не следовали один за другим?

40. На книжной полке плотно уставлены n книг. Сколькими способами можно взять с полки k книг при условии, что ни разу не будут вынуты рядом стоящие книги?

3. ВЫБОРКИ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Из букв *с*, *т*, *е*, *н*, *а* можно образовать $P_5 = 5! = 120$ разных слов. Сколько разных слов можно образовать из букв слова «гамма»? Столько же? Оказывается, нет! Только 30. Знакомая формула числа перестановок в данном случае бессильна, ибо элементы в «перестановках» повторяются: в слове «гамма» при перестановке местами букв *а* и *м* никаких изменений не происходит — остается то же самое слово. Мы ввели новый вид выборок — *перестановки с повторениями*.

Пусть даны k элементов. Построим выборку из этого множества элементов. Первый элемент повторим n_1 раз, второй n_2 раз, . . ., k-й повторим n_k раз: $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Если бы все элементы были различными, то по формуле (3.4) у нас получилось бы $n!$ перестановок.

Но так как некоторые элементы в выборке повторяются и при их перестановке новой перестановки не получим, то понятно, что число перестановок с повторениями меньше $n!$, но во сколько раз меньше?

Пусть имеется выборка

$$\underbrace{aaa\ldots a}_{n_1}\ \underbrace{bbb\ldots b}_{n_2}\ \ldots\ \underbrace{lll\ldots l}_{n_k}.$$

Элементы a можно переставить $P_{n_1} = (n_1)!$ способами, элементы b — $P_{n_2} = (n_2)!$ способами, ..., элементы — $P_{n_k} = (n_k)!$ способами, но число перестановок с повторениями от этого не изменится. Значит, число перестановок с повторениями меньше числа перестановок без повторения в $n_1!\, n_2! \ldots n_k!$ раз. Поэтому число перестановок с повторениями

$$P_{n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}. \tag{3.6}$$

В примере с выборкой букв из слова «гамма» $n = 5$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$. Поэтому, как мы уже убедились, можно образовать

$$\frac{5!}{1!\ 2!\ 2!} = 30$$

разных слов (не все они имеют смысл).

Рассмотрим следующую задачу.

Задача. В гастрономе имеются конфеты трех наименований. Конфеты упакованы в коробки трех видов — для каждого наименования своя коробка. Сколькими способами можно заказать набор из 5 коробок?

Здесь необходимо установить число выборок, которые составляются из 5 элементов и отличаются (хотя бы одним элементом). В составе каждой выборки непременно будет повторение элементов.

Каждый заказ зашифруем теперь нулями и единицами. Сначала напишем столько единиц, сколько заказали коробок конфет первого наименования. Потом напишем нуль. Дальше напишем столько единиц, сколько заказали коробок конфет второго наименования. После этого опять нуль и столько единиц, сколько заказали коробок конфет третьего наименования. Если конфет второго или третьего наименования совсем не заказали, то этот факт в нашей шифровке окажется отмечен двумя нулями. Если не заказаны конфеты первого или последнего наименования, пишем один нуль.

Например, событие «заказано 2 коробки конфет первого наименования, 1 — второго наименования, 2 — третьего наименования» зашифруем так:

$$1101011,$$

событие «заказано 2 коробки конфет первого наименования и 3 — третьего»:

$$1100111,$$

событие «заказано 4 коробки конфет второго и 1 — третьего»:

$$0111101.$$

Нетрудно заметить, что каждый зашифрованный заказ представляет комбинацию пяти единиц и двух нулей. Это перестановки с повторениями, где 1 повторяется 5 раз, нуль — 2 раза. Применяя формулу (3.6), устанавливаем число всевозможных наборов конфет:

$$P_{5,2} = \frac{7!}{5!\ 2!} = 21.$$

Встретившиеся в рассмотренной задаче выборки, составляемые из элементов одного и того же множества, не отличаются по своему объему, но отличаются по составу (хотя бы одним элементом). Такие выборки называются *сочетаниями с повторениями*.

Подсчитаем теперь число сочетаний $\overline{C}_n^k$ с повторениями, если объем каждой такой выборки равен k, а множество, из которого строятся выборки, содержит n элементов.

На основании проведенных рассуждений получаем:

$$\overline{C}_n^k = P_{k,\ n-1} = \frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!}; \tag{3.7}$$

так как $\dfrac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!} = \dfrac{(k+n-1)(k+n-2)\ldots(n+1)\,n\,(n-1)!}{k!\,(n-1)!} =$

$$= \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)\,n}{k!} = C_{n+k-1}^k, \text{ то}$$

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k. \tag{3.8}$$

Теперь полезно решить еще такую задачу.

Задача. Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, если одна и та же цифра может повториться несколько раз?

Если бы не было повторений, то задача нам уже известна — пришлось бы вычислять A_5^3. Но в данном случае элементы могут повторяться. Значит, мы имеем *размещения с повторениями*.

Первую цифру трехзначного числа мы можем выбрать пятью способами: одну из цифр 1, 2, 3, 4 и 5. Вторую — также пятью способами. Тогда по формуле (3.2) двузначное число можно образовать $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$ способами. Третью цифру опять можно выбрать пятью способами, и поэтому трехзначное число может быть образовано $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ способами.

Аналогичные рассуждения помогут нам определить число размещений с повторениями и в общем случае.

Пусть данное множество содержит n элементов, из которых необходимо образовать размещения по k элементов с повторениями, т. е. в одном размещении тот же самый элемент может повториться 2, 3, . . ., k раз. Сколько таких размещений?

Первый элемент какого-нибудь из упомянутых размещений мы можем выбрать n способами (одного из данных n элементов). Второй элемент тоже n способами. Тогда в силу формулы (3.2) пару элементов можно образовать $n \cdot n = n^2$ способами. Третий элемент опять можем выбрать n способами, четвертый также и т. д. Понятно, что в таком случае размещения из n элементов можем образовать $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$ способами. Если договоримся число размещений с повторениями обозначать $\bar{A}_n^k$, то

$$\bar{A}_n^k = n^k. \tag{3.9}$$

Примеры

1. Мать купила 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Девять дней подряд она каждый день предлагает сыну по одному фрукту. Сколькими способами она может выдать сыну фрукты?

Обозначим: яблоко — я, грушу — г, апельсин — а. Напишем одну из возможных выборок:

ггягааяаа

Все остальные выборки можно получить перестановкой ее элементов. Следовательно, приходится вычислять перестановки с повторениями. В нашей задаче $n = 9$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$.

Поэтому число всевозможных способов раздачи фруктов

$$P_{2,3,4} = \frac{9!}{2!\ 3!\ 4!} = 1260.$$

2. В продажу поступили открытки 10 разных видов. Сколькими способами можно образовать набор из 12 открыток? из 8 открыток?

В данном случае нам приходится считать сочетания с повторениями

$$\bar{C}_{10}^{12} = \frac{21!}{12!\ 9!} = 293\,930,$$

$$\bar{C}_{10}^{8} = \frac{17!}{8!\ 9!} = 24\,310.$$

3. Сколько разных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, если та же самая цифра может повториться несколько раз?

Из цифр 0, 1, 2 можно составить $\bar{A}_3^4 = 3^4$ четырехзначных числа. Но числа, записанные четырьмя цифрами, первая из которых нуль, не являются четырехзначными. Значит, из числа размещений с повторениями надо вычесть число таких выборок, которые начинаются нулем. Последних столько, сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2 при повторении цифр. Таких чисел будет $\bar{A}_3^3 = 3^3$.

Поэтому ответ:

$$3^4 - 3^3 = 54.$$

Упражнения

41. Сколько разных слов можно образовать при перестановке букв слова «математика»?

42. Сколько разных слов можно образовать при перестановке букв слова «соединение»?

43. Для несения почетного караула из 10 человек могут быть приглашены офицеры пехотных войск, авиации, погранвойск, артиллерии, офицеры морского флота и ракетных войск. Сколькими способами можно избрать состав почетного караула?

44. Докажите:

$$\bar{C}_n^{k-m} = C_{n-m+k-1}^{k-m}.$$

45. На школьный вечер танцев собрались ребята VIII, IX и X классов. Вести хоровод приглашаются 10 школьников. Сколькими способами можно составить хоровод при условии участия в нем хотя бы одного десятиклассника?

46. На студенческий вечер собрались юноши и девушки 8 факультетов университета (в том числе математического и филологического). Для исполнения танцев народов Латинской Америки приглашаются 10 студентов. Сколькими способами можно выбрать эту десятку при условии участия в ней хотя бы одного студента математического и хотя бы одного студента филологического факультета?

47. На Всемирный фестиваль молодежи в Москву прибыла молодежь пяти континентов мира. Возникла необходимость организовать делегацию из 8 представителей разных стран для оглашения клятвы борцов за мир. Сколькими способами можно было образовать делегацию при условии участия в ней представителей всех континентов?

48. Сколько пятизначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, если допускается повторение этих цифр?

49. Сколько пятизначных чисел можно образовать из цифр 0 и 1?

50. В одном государстве (сказочном) не найдется двух человек, у которых оказался бы одинаковый состав зубов: либо у них разное число зубов, либо зубов нет в разных местах. Оцените наибольшую численность населения в этом государстве, если максимальное число зубов у одного человека 32.

51. Сколькими способами можно отослать 6 писем разным адресатам, если их будут разносить 3 курьера и заранее неизвестно, какому курьеру какое достанется письмо?

52. Четыре студента сдают экзамен. Сколько может быть вариантов распределения оценок, если известно, что так или иначе все они экзамены сдали?

53. Три парня и две девушки решили после окончания школы поступить на работу в своем родном городе. В городе имеются 3 завода, на которые набирают мужчин, 2 — где нужны женщины, и 2 — которые принимают на работу и мужчин и женщин. Сколькими способами пять выпускников могут распределиться по заводам города?

4. СЛОЖНАЯ КОМБИНАТОРИКА

Изученные нами до сих пор приемы комбинаторики позволяют решать немало разных задач, если удается правильно определить вид выборок, о которых идет речь в той или иной задаче. Мы советуем читателю каждый раз строить из элементов данного множества несколько конкретных выборок соответственно условиям задачи. Обзор таких выборок помогает раскрыть принадлежность их к определенному типу выборок и, следовательно, подводит к формуле, которой надлежит воспользоваться.

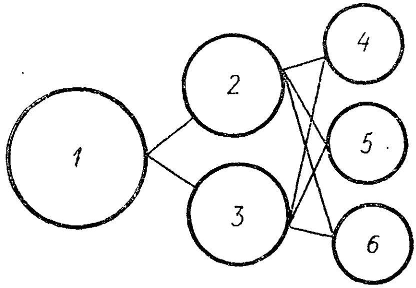

Рис. 11

1 — выборки; *2* — выборки без повторений; *3* — выборки с повторениями; *4* — перестановки; *5* — сочетания; *6* — размещения

Упрощенная схема рассуждений приведена на рисунке 11.

Когда в задаче фигурируют выборки разных видов, недостаточно их обнаружить. Необходимо установить связи между ними, характер математических закономерностей, которым они подчиняются, их логическую и комбинаторную природу. По-видимому, невозможно представить всевозможные ситуации одной схемой или с помощью одной общей задачи. Поэтому мы не можем предложить читателю универсальный ключ, который помог бы легко найти путь решения любой комбинаторной задачи, но тем не менее разбор некоторых сложных задач раскроет некоторые способы рассуждений. Надеемся, что это поможет читателю ориентироваться при решении и других задач повышенной сложности.

Примеры

1. Сколькими способами можно расставить n нулей и k единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

Эта задача имеет смысл только при $k \leqslant n + 1$.

Убедимся в этом.

Между n нулями имеется $n - 1$ одноместное «гнездо» для единицы. Но единица еще может занять одно место впереди всех нулей и одно место за всеми нулями. Таким образом, для k единиц имеем $n - 1 + 1 + 1 = n + 1$ одноместных «гнезд». Задача сводится к такой формулировке: «Сколькими способами можно k одинаковых «шариков» распределить по $n + 1$ одноместным «гнездам», что равносильно: «Сколькими способами из $n + 1$ элемента можно образовать выборки по k элементов, когда их порядок не существен?» Ответ: разумеется, C_{n+1}^{k} способами.

2. Между четырьмя игроками в домино поровну распределяются 28 костей. Сколькими способами могут распределиться кости домино?

Первый игрок 7 костей может выбрать C_{28}^{7} способами. (Он не обязательно первым набрал кости, но с него мы начинаем строить возможные выборки.) Второму игроку приходится свою долю костей выбирать из числа 21 оставшейся кости. Это он может сделать C_{21}^{7} способами. Третий — C_{14}^{7} способами, а четвертый — C_{7}^{7} способами. Тогда по правилу (3.2) кости могут быть распределены

$$C_{28}^{7} \cdot C_{21}^{7} \cdot C_{14}^{7} \cdot C_{7}^{7} = \frac{28!}{(7!)^4}.$$

Учащийся может возразить, что число всевозможных выборок раздачи костей зависит от порядка раздачи. Это не так! Допустим, игрокам кости розданы в таком порядке:

первый может получить 4 кости C_{28}^{4} способами, после чего
второй может получить 3 кости C_{24}^{3} способами, после чего
третий может получить 6 костей C_{21}^{6} способами, после чего
четвертый может получить 2 кости C_{15}^{2} способами, после чего
первый может получить 3 кости C_{13}^{3} способами, после чего
четвертый может получить 5 костей C_{10}^{5} способами, после чего
третий может получить 1 кость C_{5}^{1} способами, после чего
второй может получить 4 кости C_{4}^{4} способами.

В силу правила (3.2) число всех выборок равно

$$C_{28}^4 \cdot C_{24}^3 \cdot C_{21}^6 \cdot C_{15}^2 \cdot C_{13}^3 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^1 \cdot C_4^4 =$$

$$= \frac{28!}{4!\,24!} \cdot \frac{24!}{3!\,21!} \cdot \frac{21!}{6!\,15!} \cdot \frac{15!}{2!\,13!} \cdot \frac{13!}{3!\,10!} \cdot \frac{10!}{5!\,5!} \cdot \frac{5!}{1!\,4!} \cdot \frac{4!}{4!\,0!} = \frac{28!}{4!\,3!\,6!\,2!\,3!\,5!\,4!}.$$

Но первый игрок кости выбирал два раза, поэтому выборок образовалось в $\frac{7!}{4!\,3!}$ раз больше из-за очередности, которая не имеет влияния на окончательный результат. Второй игрок также выбирал два раза, поэтому выборок образовалось в $\frac{7}{3!\,4!}$ раз больше. Третий опять два раза, поэтому выборок образовалось в $\frac{7}{6!\,1!}$ раз больше. У четвертого получилось в $\frac{7}{2!\,5!}$ раз больше.

Следовательно, выборок получилось

$$\frac{28!}{4!\,3!\,6!\,2!\,3!\,5!\,4!} : \frac{(7!)^4}{4!\,3!\,3!\,4!\,6!\,2!\,5!} = \frac{28!}{(7!)^4},$$

Итак, очередность выбора костей (как это, естественно, и следовало ожидать) не влияет на результат.

Упражнения

54. Выпускнику средней школы, поступающему в вуз, нужно сдать 4 экзамена и набрать на них не менее 17 баллов (двойки при этом получать нельзя). Сколько существует разных наборов экзаменационных отметок, дающих ему право поступления?

55. Сколько разных по стоимости браслетов может составить ювелир из набора в 18 камней, если у него имеются 5 одинаковых по стоимости рубинов, 6 одинаковых по стоимости алмазов и 7 одинаковых по стоимости кусков янтаря?

56. У мужа 12 сослуживцев: 5 женщин и 7 мужчин. У жены тоже 12: 7 женщин и 5 мужчин. За семейным столом помещаются 14 человек. Сколько разных компаний из 6 женщин и 6 мужчин могут они пригласить при условии участия 6 знакомых мужа и 6 знакомых жены?

57. Все участники туристической поездки владеют по крайней мере одним иностранным языком. 6 из них владеют английским языком, 6 — немецким, 7 — французским, 4 — английским и немецким, 3 — немецким и французским, 2 — французским и английским. Один турист владеет английским, французским и немецким языками. Других туристов в группе нет. Сколько туристов владеет только английским языком, только французским? Сколько туристов в группе?

58. Отряд из 92 школьников собрался в поход. 47 из них приготовили бутерброды с колбасой, с сыром — 38, с ветчиной — 42, с колбасой и с сыром — 28, с колбасой и с ветчиной — 31, с сыром и с ветчиной — 26. 25 школьников взяли с собой бутерброды всех сортов, а некоторые взяли только по бутылке молока. Сколько было таких, которые взяли только молоко?

59. Найти сумму всех четырехзначных чисел, которые получаются при перестановке цифр 1234.

60. Сколько чисел, меньших миллиона, можно записать с помощью цифр 8 и 9?

61. Найдите сумму трехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3 и 4?

62. Города A и B соединяются 2 шоссейными дорогами, которые пересечены 10 проселочными. Сколькими разными способами можно добраться от A до B так, чтобы ни разу не пересекать пройденный путь?

63. Имеется неограниченное количество монет по 10, 15 и 20 коп. Сколькими способами можно образовать набор из 20 монет?

64. На заседании научного студенческого общества присутствовало 52 студента: по 13 студентов от 4 факультетов. Сколькими способами можно избрать правление общества в составе 4 лиц так, чтобы в состав правления вошли представители трех факультетов?

65. По линейке расположены n предметов. Сколькими способами можно убрать 3 из них так, чтобы не были убраны рядом стоящие предметы?

66. 5 белых шариков, 5 черных и 5 красных надо разложить по 3 ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось по 5 шариков. Сколькими способами это можно осуществить?

67. При закрытии пионерского фестиваля Прибалтийских республик в первый ряд президиума (из 9 мест) были приглашены 3 литовских, 3 латышских и 3 эстонских пионера. Сколькими способами их можно рассадить так, чтобы ни одна тройка представителей из одной республики не занимала трех соседних мест?

68. Сколько цифр понадобится для записи всех чисел от 1 до 999 999 включительно?

IV. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Бросаем игральную кость. Выпасть могут или одно, или два, или три, или четыре, или пять, или шесть очков. Каждое из этих событий элементарное, и вместе они образуют множество элементарных событий. Рассмотрим теперь следующие события:

A — «выпадение 5 очков»,

B — «выпадение четного числа очков»,

C — «выпадение не меньше 3 очков».

Событие A — одно из шести равновозможных элементарных событий.

Событие B означает «выпадение или 2, или 4, или 6 очков», т. е. оно представляет три из шести равновозможных элементарных событий.

Событие C означает «выпадение или 3, или 4, или 5, или 6 очков», т. е. оно представляет четыре из шести равновозможных элементарных событий.

У нас нет данных, чтобы, бросая кость, предугадать будущий результат, но кое-какие предположения высказать мы можем. Так, ясно, что событие A должно происходить реже, чем B (событию A благоприятствует меньше элементарных событий), а последнее должно происходить реже, чем событие C (событию B благоприятствует меньше элементарных событий). Как численно оценить возможности появления событий A, B и C?

Рассмотрим следующие элементарные события, которые при бросании игральной кости, как нам уже известно, образуют полную группу попарно несовместимых событий:

A_1 — «выпадение 1 очка»,
A_2 — «выпадение 2 очков»,
A_3 — «выпадение 3 очков»,
A_4 — «выпадение 4 очков»,
A_5 — «выпадение 5 очков»,
A_6 — «выпадение 6 очков».

Если имеет место элементарное событие A_2, то имеет место и событие B. Если имеет место элементарное событие A_4, то вновь происходит событие B. Если имеет место элементарное событие A_6, то опять имеет место B. Значит, элементарные события A_2, A_4 и A_6 благоприятствуют событию B, аналогично элементарное событие A_5 благоприятствует событию A, а элементарные события A_3, A_4, A_5 и A_6 — событию C. Возможность появления того или иного события удобно оценивать отношением числа благоприятствующих элементарных событий к числу равновозможных элементарных событий, которые образуют полную группу попарно несовместимых событий. В данном случае возможность появления события A оценивается числом $\frac{1}{6}$, события B — $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, события C — $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Эти числа называются **вероятностями** соответствующих событий и обозначаются:

$$\boldsymbol{P}(A)=\frac{1}{6},\ \boldsymbol{P}(B)=\frac{1}{2},\ \boldsymbol{P}(C)=\frac{2}{3}.$$

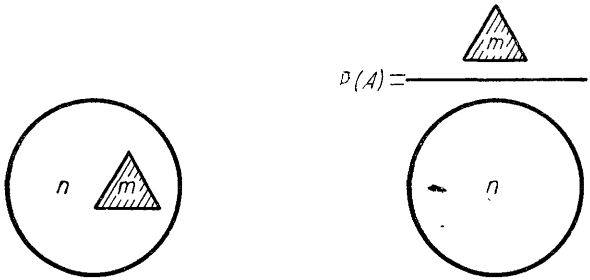

Рис. 12

Пусть m — число всех тех равновозможных элементарных событий, которые благоприятствуют некоторому событию A; n — число элементарных событий, образующих полную группу равновозможных и попарно несовместимых событий. Отношение $\frac{m}{n}$ называем *вероятностью* события A и обозначаем:

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{m}{n}. \tag{4.1}$$

Вероятность $\boldsymbol{P}(A)$ можно рассматривать как функцию события A, определенную на множестве элементарных событий E. Из определения должно быть ясно, что $\boldsymbol{P}(U) = 1$, $\boldsymbol{P}(V) = 0$[1]. Если событие B не является ни достоверным, ни невозможным, то

$$0 < \boldsymbol{P}(B) < 1.$$

Иногда мы сталкиваемся с событиями, для которых не можем определить числа m и n для вычисления вероятностей этих событий, и поэтому не удается непосредственно пользоваться формулой (4.1).

К числу таких событий относятся содержащие бесконечные подмножества множества элементарных событий. Рассмотрим, например, задачу на отыскание так называемой геометрической вероятности.

Задача. Пусть на плоскости задан круг и в нем треугольник (рис. 12). В круг наудачу бросается точка. Как определить вероятность события A, состоящего в том, что точка попадает в треугольник?

При решении этой задачи будем руководствоваться следующим исходным положением:

вероятность попасть в какую-либо часть круга пропорциональна площади этой части.

Если площадь круга составляет n единиц площади, а площадь треугольника m единиц площади, то в силу пропорциональности

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{mk \text{ един. пл.}}{nk \text{ един. пл.}} = \frac{m}{n}.$$

Отношение $\frac{m}{n}$, конечно, в таких случаях совсем не обязано быть рациональным числом, а m и n — положительными целыми числами. Хотя формально результат и записывается так же, как формула (4.1), смысл он имеет несколько иной.

Примеры

1. В ящике имеются 4 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар окажется белым?

В этом случае $m = 4$, $n = 11$. Поэтому $\boldsymbol{P}$ («наудачу вынутый шар белый») $= \frac{4}{11}$.

---

[1] Если $P(A) = 0$, то это не означает, что событие A невозможно, т. е. что A и V совпадают.

2. Первенство по баскетболу оспаривают 18 лучших команд, которые путем жеребьевки распределяются на две группы, по 9 команд в каждой. 5 команд обычно занимают первые места. Какова вероятность попадания всех лидирующих команд в одну группу? Какова вероятность попадания двух лидирующих команд в одну группу и трех — в другую?

Обозначаем события:

A — «все 5 лидирующих команд попали в одну группу»,

B — «2 лидирующие команды попали в одну группу, 3 — в другую».

Из 18 команд группы по 9 команд могут быть образованы C_{18}^9 способами. Таким образом, $n = C_{18}^9$. Событию A благоприятствует столько событий, сколькими способами 5 лидирующих команд могут образовывать девятки с четырьмя командами из числа остальных 13 команд. Поэтому как первая, так и вторая девятка могут быть образованы C_{13}^4 способами. Следовательно, $m = 2C_{13}^4$.

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{2C_{13}^4}{C_{18}^9} = \frac{1}{34}.$$

Аналогичные рассуждения подсказывают нам, что число событий, благоприятствующих событию B, равно

$$m = C_5^2 \cdot C_{13}^7 + C_5^3 \cdot C_{13}^6.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{P}(B) = \frac{C_5^2 \cdot C_{13}^7 + C_5^3 \cdot C_{13}^6}{C_{18}^9} = \frac{12}{17}.$$

Наличие лидирующих команд в обеих группах более вероятно, чем их отсутствие в одной из групп. Любители баскетбола в этом убеждаются на практике: слабых групп нет!

3. Таня и Ваня договорились встречать Новый год в компании из 10 человек. Они оба очень хотели сидеть за праздничным столом рядом. Какова вероятность исполнения их желания, если среди их друзей принято места распределять путем жребия?

10 лиц могут усесться за стол 10! разными способами. Сколько же из этих $n = 10!$ равновозможных способов благоприятны для Тани и Вани? Таня и Ваня, сидя рядом, могут занять 20 разных позиций. В то же время восьмерка их друзей может сесть за стол 8! разными способами, поэтому $m = 20 \cdot 8!$. Поэтому $\boldsymbol{P}$ («исполнение желания Тани и Вани») $= \dfrac{20 \cdot 8!}{10!} = \dfrac{2}{9}$.

Не очень-то утешающий ответ.

Формула (4.1) для вычисления вероятностей может быть применена только тогда, когда известно:

1) что результаты всех испытаний или наблюдений равновозможны;

2) что все равновозможные результаты (события) образуют полную группу попарно несовместимых событий.

Мы уже рассказывали читателю о трудностях, с которыми столкнулись последователи Лапласа. Как избежать подобных недоразумений при вычислении вероятности таких событий, равновозможность которых не удается установить на основании симметрии используемых моделей? Как действовать в таких случаях, когда не удается непосредственно убедиться в попарной несовместимости событий?

Пусть стрелок производит выстрел по мишени. Как оценить вероятность попадания? Если события «попадание» и «промах» равновозможны, то ответ получаем сразу:

$$\boldsymbol{P}\ (\text{«попадания»}) = \frac{1}{2}.$$

Но они могут быть не равновозможны. Скажем, Алеша постоянно посещает тренировки по стрельбе и каждый раз из сотни выстрелов попадает в мишень 80—90 раз, а Сережа на стрельбище бывает редко, поэтому из сотни выстрелов попадает только 30—40 раз. Ясно, что у Алеши возможность попадания больше, чем у Сережи. Как оценить эти разные возможности? Из практики, так, как определяется число появлений герба при подбрасывании монеты.

Произведено выстрелов	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Число попаданий Алеши	8	17	26	33	41	49	56	65	72	81
Число попаданий Сережи	3	5	8	12	15	19	22	25	28	31

Из таблицы видно, что как у Алеши, так и у Сережи отношение числа попаданий к числу произведенных выстрелов меняется. Эти отношения в какой-то мере зависят от числа произведенных выстрелов. Но вместе с тем заметно, что упомянутое отношение для каждого стрелка колеблется около определенного числа: у Алеши около $\frac{4}{5}$, у Сережи около $\frac{3}{10}$. Эти числа логично принять за оценку вероятности попадания — частоту. Эта оценка тем более надежна, чем больше проведено опытов с целью установления ее значения.

Пусть l — число испытаний, при проведении которых могло произойти или не произойти событие A, а k — число испытаний, при проведении которых событие A произошло. Отношение $\frac{k}{l}$ называем частотой события A и обозначаем:

$$\boldsymbol{P}_l\{A\} = \frac{k}{l}. \tag{4.2}$$

Индекс l специально ставим для того, чтобы подчеркнуть зависимость частоты от числа испытаний. Практика показывает, что в случаях, когда точно знаем вероятность $\boldsymbol{P}(A)$ в классическом понимании, при достаточно большом числе испытаний l,

$$\boldsymbol{P}_l\{A\} \approx \boldsymbol{P}(A).$$

Это приближенное равенство получило теоретическое обоснование, как увидим далее, в законе больших чисел, открытом Яковом Бернулли. Непосредственно из формул (4.1) и (4.2) следуют такие важные выводы:

1) Вероятность достоверного события равна 1, т. е.

$$\boldsymbol{P}(U) = \frac{n}{n} = 1.$$

2) Вероятность невозможного события равна нулю, т. е.

$$\boldsymbol{P}(V) = \frac{0}{n} = 0.$$

Замечание: если $\boldsymbol{P}(A) = 0$, то это не значит, что событие A невозможно, т. е. что утверждение, обратное 2-му, неверно.

3) Вероятность любого события A подчиняется неравенству

$$0 \leqslant \boldsymbol{P}(A) \leqslant 1, \text{ ибо } m \leqslant n.$$

Примеры

1. Как приближенно установить число рыб в озере?

Пусть в озере x рыб. Забрасываем сеть и, допустим, находим в ней n рыб. Каждую из них метим и выпускаем обратно в царство Нептуна. Через несколько дней в такую же погоду и в том же месте забрасываем ту же самую сеть. Допустим, что находим в ней m рыб, среди которых k меченых. Пусть событие A — «пойманная рыба мечена». Тогда по формуле (4.2)

$$\boldsymbol{P}_m\{A\} = \frac{k}{m}.$$

Но если в озере x рыб и мы в него выпустили n меченых, то согласно формуле (4.1)

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{n}{x}.$$

Так как

$$\boldsymbol{P}_m\{A\} \approx \boldsymbol{P}(A), \text{ то } x \approx \frac{mn}{k}.$$

2. Из 1000 произвольно выбранных деталей 4 бракуются. Сколько бракованных окажется среди 2 400 деталей (приближенно)?

Обозначим события:

A — «наугад выбранная деталь бракованная».

Тогда $P\{A\} = 0{,}004$.

Если среди 2400 деталей x бракованных, то $P(A) = \frac{x}{2400}$. Так как $P\{A\} \approx P(A)$, то $\frac{x}{2400} \approx 0{,}004$, откуда $x \approx 10$.

Упражнения

69. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Неграмотный мальчик перемешал буквы, а потом их наугад собрал. Какова вероятность того, что он опять составил слово «книга»?

70. На первом этаже семиэтажного дома в лифт зашли 3 человека. Вероятность выхода каждого из лифта на любом этаже одинакова. Найдите вероятности событий:

A — «все вышли из лифта на 4 этаже»,

B — «все вышли из лифта на одном и том же этаже»,

C — «все выходили из лифта на разных этажах».

71. 10 шаров произвольно раскладываются по 4 ящикам. Чему равна вероятность того, что в первом ящике окажется один шар, во втором — 2, в третьем — 3 и в четвертом — 4 шара?

72. 4 зенитных пулемета ведут огонь по 3 самолетам. Каждый пулемет выбирает объект обстрела наугад. Какова вероятность того, что все 4 пулемета ведут огонь по одному и тому же самолету?

73. На пяти карточках написано по одной цифре из набора 1, 2, 3, 4 и 5. Наугад выбираются одна за другой две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке больше, чем на первой?

74. В одном ящике 6 белых и 4 черных шарика. Во втором — 7 белых и 3 черных. Из каждого ящика наугад вынимается по одному шарику. Чему равна вероятность того, что оба шарика окажутся белыми?

75. Условия задачи те же. Чему равна вероятность того, что вынутые шарики разных цветов?

76. Четырем игрокам раздается поровну колода из 32 карт. Определить вероятность того, что каждый игрок получил карты только одной масти.

77. Какова вероятность того, что при случайном распределении n шариков по n гнездам одно гнездо окажется пустым?

78. На стоянке автомобилей можно поместить 12 машин в один ряд. Однажды оказались свободны 4 места подряд. Является ли это событием исключительным или столь же часто бывают свободны 4 не соседних места?

79. В ящике 90 стандартных и 10 нестандартных деталей. Какова вероятность того, что среди 10 наугад вынутых деталей бракованных не окажется?

80. В некотором семействе 4 сестры по очереди моют посуду. Из каждых 4 разбитых тарелок 3 разбито младшей, и поэтому ее называют неуклюжей. Справедливо ли это?

81. Номер телефона состоит из пяти цифр. Какова вероятность того, что все цифры наугад набранного номера разные?

82. Замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, отмеченных цифрами. Замок может быть открыт только в том случае, если все диски занимают определенные положения относительно корпуса замка, их цифры образуют определенное число, составляющее «секрет» замка. Какова вероятность открыть замок, установив произвольную комбинацию цифр?

83. Два друга условились встретиться в Москве у памятника А. С. Пушкину между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет второго в течение α минут ($\alpha < 60$), после чего уходит. Чему равна вероятность встречи?

До сих пор мы использовали для подсчета вероятностей только определение вероятности. Со следующего параграфа начнем использовать некоторые простейшие формулы.

V. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕРОЯТНОСТЯМИ

1. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ НЕСОВМЕСТИМЫХ СОБЫТИЙ

Пусть m — число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию A, k — число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию B, несовместимому по отношению к событию A. Пусть n — общее число равновозможных элементарных событий, образующих полную группу несовместимых событий.

В силу формулы (4.1)

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{m}{n}, \quad \boldsymbol{P}(B) = \frac{k}{n}.$$

Согласно определению суммы несовместимых событий $A + B$ означает: «имеет место или A, или B». Но число событий, благоприятствующих такому событию, равно $m + k$, поэтому согласно формуле (4.1)

$$\boldsymbol{P}(A + B) = \frac{m + k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n}.$$

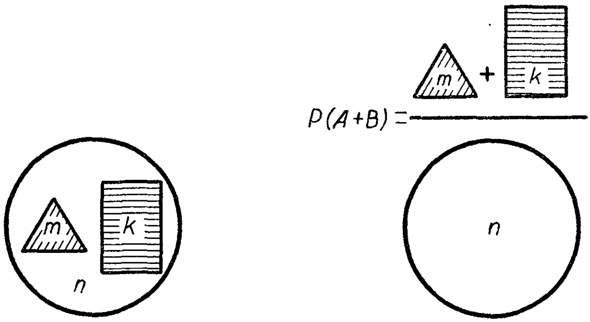

Рис. 13

Применяя только что рассмотренные равенства, находим:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{5.1}$$

На рисунке 13 дана геометрическая интерпретация формулы (5.1), если m, k и n здесь величины площадей нарисованных фигур.

Последнее равенство выражает следующее правило, которое последовательным применением формулы (5.1) может быть распространено на любое конечное число событий.

Вероятность суммы попарно несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.

С помощью этого правила мы можем справиться со многими задачами.

Примеры

1. В лотерее выпущено 10 000 билетов и установлены: 10 выигрышей по 200 руб., 100 — по 100 руб., 500 — по 25 руб. и 1000 выигрышей — по 5 руб. Гражданин купил 1 билет. Какова вероятность того, что он выиграет не меньше 25 рублей?

Обозначим события:

A — «выигрыш не менее 25 рублей»,

A_1 — «выигрыш равен 25 рублям»,

A_2 — «выигрыш равен 100 рублям»,

A_3 — «выигрыш равен 200 рублям».

Поскольку куплен только один билет, то $A = A_1 + A_2 + A_3$, где события A_1, A_2 и A_3 попарно несовместимы, поэтому

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3),$$
$$P(A_1) = 0{,}05,\ P(A_2) = 0{,}01,\ P(A_3) = 0{,}001,$$
$$P(A) = 0{,}05 + 0{,}01 + 0{,}001 = 0{,}061.$$

2. Военный летчик получил задание уничтожить 3 рядом расположенных склада боеприпасов противника. На борту самолета одна бомба. Вероятность попадания в первый склад 0,01, во второй — 0,008, в третий — 0,025.

Любое попадание в результате детонации вызывает взрыв и остальных складов. Какова вероятность того, что склады противника будут уничтожены?

Обозначим события:

A — «склады уничтожены»,

A_1 — «попадание в первый склад»,

A_2 — «попадание во второй склад»,

A_3 — «попадание в третий склад».

Для уничтожения складов достаточно попадания в один из упомянутых трех складов. Поэтому

$$A = A_1 + A_2 + A_3,$$
$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) =$$
$$= 0{,}01 + 0{,}008 + 0{,}025 = 0{,}043.$$

3. Бросают две монеты. Чему равна вероятность появления хотя бы одного герба?

Обозначим события:

A — «появление герба при подбрасывании первой монеты»,

B — «появление герба при подбрасывании второй монеты».

Снова предстоит найти вероятность события $C = A + B$. Но в этом случае $\boldsymbol{P}(C) \neq \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B)$, ибо события A и B совместимы. Поэтому формула (5.1) не применима. Приходится избрать другой путь решения.

Пусть событие $\overline{C}$ — «выпадение герба не состоялось». Ясно, что $\boldsymbol{P}(\overline{C}) = \frac{1}{4}$, ибо при бросании двух монет могут произойти только следующие события, составляющие полную группу несовместимых событий.

$$\text{гг}, \boxed{\text{цц}}, \text{цг}, \text{гц}.$$

Событие $C + \overline{C}$ представляет собой достоверное событие, поэтому $C + \overline{C} = U$.

$$\boldsymbol{P}(U) = \boldsymbol{P}(C + \overline{C}) = \boldsymbol{P}(C) + \boldsymbol{P}(\overline{C}) = 1,$$

отсюда

$$\boldsymbol{P}(C) = 1 - \boldsymbol{P}(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

2. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ СОВМЕСТИМЫХ СОБЫТИЙ

Пусть m — число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию A, k — число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию B. Допустим, что среди упомянутых $m + k$ событий содержится l таких, которые благоприятствуют и событию A, и событию B. Если n — общее число равновозможных элементарных событий, образующих полную группу, то согласно формуле (4.1)

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{m}{n}, \ \boldsymbol{P}(B) = \frac{k}{n}, \ \boldsymbol{P}(AB) = \frac{l}{n}.$$

Запись $A + B$ означает: «произойдет или событие A, или B, или и то и другое вместе». Но такому событию благоприятствуют $(m + k - l)$ элементарных событий. Поэтому по формуле (4.1) находим:

$$\boldsymbol{P}(A + B) = \frac{m + k - l}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{l}{n}.$$

Подставляя значение, получим:

$$\boldsymbol{P}(A + B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB). \qquad (5.2)$$

Ясно, что эта формула представляет собой обобщение формулы (5.1). На основании равенства (5.2) формулируем правило.

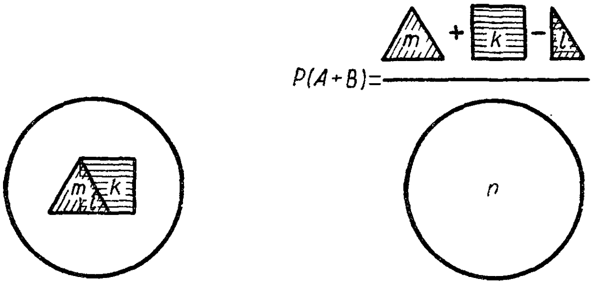

Рис. 14

Вероятность суммы двух совместимых событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного осуществления.

Геометрическая интерпретация формулы (5.2) дается на рисунке 14, где m, k, l, n представляют величины площадей нарисованных фигур.

Примеры

1. Подбрасываем две монеты. Какова вероятность выпадания хотя бы одного герба?

Обозначим события:

A — «появление герба при подбрасывании первой монеты»,

B — «появление герба при подбрасывании второй монеты».

Нам надо определить вероятность события $C = A + B$.

Так как A и B — совместимые события, то

$$\boldsymbol{P}(C) = \boldsymbol{P}(A + B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB).$$

Ясно, что $\boldsymbol{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{P}(AB) = \frac{1}{4}$. Отсюда $\boldsymbol{P}(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

2. Бросают две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

Обозначим события:

A — «появление шестерки при бросании первой кости»,

B — «появление шестерки при бросании второй кости».

Нам надлежит определить вероятность события $C = A + B$.

$$\boldsymbol{P}(C) = \boldsymbol{P}(A + B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB).$$

Ясно, что

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{1}{6},\ \boldsymbol{P}(B) = \frac{1}{6},\ \boldsymbol{P}(AB) = \frac{1}{36}.$$

Тогда

$$P(C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}.$$

3. A, B и C — совместимые события.

Доказать:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-$$
$$-P(BC)+P(ABC).$$

Обозначим $A+B=D$. Тогда

$$P(A+B+C)=P(D+C)=P(D)+P(C)-P(DC)=$$
$$=P(A+B)+P(C)-P((A+B)C)=P(A)+P(B)-$$
$$-P(AB)+P(C)-P(AC+BC)=P(A)+P(B)+P(C)-$$
$$-P(AB)-(P(AC)+P(BC)-P(ACBC))=P(A)+$$
$$+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC),\text{ ибо}$$
$$ACBC=ABC.$$

3. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Из ящика, в котором a белых и b черных шаров, наугад вынимаются последовательно один за другим два шара.

Рассмотрим события:

A — «первый шар белый»,

B — «второй шар белый».

Понятно, что $P(A)=\frac{a}{a+b}$. Какова же вероятность события B?

Если событие A произошло, то среди оставшихся $a+b-1$ шаров только $a-1$ белых, поэтому вероятность того, что второй шар белый $\frac{a-1}{a+b-1}$. Если же A не произошло, то среди оставшихся шаров белых a, поэтому вероятность того, что второй шар белый $\frac{a}{a+b-1}$. Мы столкнулись с ситуацией, когда вероятность появления события B зависит от того, произошло или не произошло событие A. В таком случае говорим, что событие B зависит от события A, а вероятность появления события B условная.

Найдем способ вычисления таких вероятностей.

Условную вероятность появления события B, если событие A произошло, будем обозначать $P(B/A)$.

Пусть из n равновозможных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, составляющих полную группу,

событию A благоприятствуют m событий,

событию B благоприятствуют k событий,

событию AB благоприятствуют r событий

(понятно, что $r \leqslant k$, $r \leqslant m$). Если событие A произошло, то это означает, что наступило одно из событий A_j, благоприятствующих событию A. При этом условии событию B благоприятствуют r и только r событий A_j, благоприятствующих AB. Таким образом,

$$P(B/A) = \frac{r}{m} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Точно так же

$$P(A/B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

На основании этих формул находим:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B),$$
$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A),$$

т. е.

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A). \qquad (5.3)$$

На основании (5.3) формулируем правило умножения вероятностей.

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло.

З а м е ч а н и е. Формулы (5.3) имеют смысл в том случае, если имеют смысл события A/B и B/A. А они имеют смысл тогда, когда события A и B совместимы.

П р и м е р ы

1. В ящике a белых и b черных шаров. Последовательно вынимаются два шара. Какова вероятность того, что оба они белые?

Обозначим события:

A — «первый шар белый»,

B — «второй шар белый».

Нам надлежит найти $P(AB)$. Имеем:

$$P(B/A) = \frac{a-1}{a+b-1}, \quad P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

Согласно формуле (5.3) находим:

$$P(AB) = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

2. Из колоды в 32 карты наугад одну за другой вынимают две карты. Найти вероятность того, что:

а) вынуты два валета;

б) вынуты две карты пиковой масти;

в) вынуты валет и дама.

Обозначим события:

A — «первая карта — валет»,
B — «вторая карта — валет»,
C — «первая карта — пиковой масти»,
D — «вторая карта — пиковой масти»,
E — «вторая карта — дама».

Нам следует найти $\boldsymbol{P}(AB)$, $\boldsymbol{P}(CD)$ и $\boldsymbol{P}(AE)$.

По формуле (5.3)

$$\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(B/A) \cdot \boldsymbol{P}(A);$$
$$\boldsymbol{P}(CD) = \boldsymbol{P}(D/C) \cdot \boldsymbol{P}(C);$$
$$\boldsymbol{P}(AE) = \boldsymbol{P}(E/A) \cdot \boldsymbol{P}(A);$$

$$\boldsymbol{P}(B/A) = \frac{3}{31}, \ \boldsymbol{P}(A) = \frac{1}{8}, \ \text{тогда } \boldsymbol{P}(AB) = \frac{3}{248};$$

$$\boldsymbol{P}(D/C) = \frac{7}{31}, \ \boldsymbol{P}(C) = \frac{1}{4}, \ \text{тогда } \boldsymbol{P}(CD) = \frac{7}{124};$$

$$\boldsymbol{P}(E/A) = \frac{4}{31}, \ \boldsymbol{P}(A) = \frac{1}{8}, \ \text{тогда } \boldsymbol{P}(EA) = \frac{1}{62}.$$

3. Доказать:

$$\boldsymbol{P}(A_1A_2A_3) = \boldsymbol{P}(A_1) \cdot \boldsymbol{P}(A_2/A_1) \cdot \boldsymbol{P}(A_3/A_1A_2).$$

Пусть $A_1A_2 = B$. Тогда $\boldsymbol{P}(A_1A_2A_3) = \boldsymbol{P}(BA_3)$. По формуле (5.3)

$$\boldsymbol{P}(BA_3) = \boldsymbol{P}(A_3/B) \cdot \boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}(A_3/A_1A_2) \cdot \boldsymbol{P}(A_1A_2).$$

Еще раз применяем формулу (5.3):

$$\boldsymbol{P}(A_1A_2A_3) = \boldsymbol{P}(A_1) \cdot \boldsymbol{P}(A_2/A_1) \cdot \boldsymbol{P}(A_3/A_1A_2).$$

4. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Событие B называется независимым от A, если его вероятность не зависит от того, произошло или не произошло событие A.

$$\boldsymbol{P}(B/A) = \boldsymbol{P}(B).$$

Это, конечно, формальное определение независимых событий. Но независимость можно определять и интуитивно — например, нетрудно сообразить, что результаты неоднократного бросания монеты — независимые события.

В случае независимости события B от события A из формулы (5.3) получим:

$$\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B). \qquad (5.4)$$

Сопоставляя формулы (5.3) и (5.4), убеждаемся, что свойство независимости взаимно. Если событие B не зависит от осуществления A, то и A не зависит от осуществления B.

На основании (5.4) формулируем правило.

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

На практике, как мы убедимся при рассмотрении примеров, для установления независимости событий обычно пользуются соображениями, основанными на опыте обращения с данными объектами, а не анализом формул.

Примеры

1. Бросают две игральные кости. Какова вероятность появления на первой кости нечетного числа очков и на второй пяти очков?

Обозначим события:

A — «появление нечетного числа очков при бросании первой кости»,

B — «появление пяти очков при бросании второй кости».

Нам нужно найти $\boldsymbol{P}(AB)$. Так как события A и B совместимы и независимы, то $\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B)$. Но $\boldsymbol{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{P}(B) = \frac{1}{6}$, поэтому $\boldsymbol{P}(AB) = \frac{1}{12}$.

2. A, B и C — совместимые и независимые события[1].

Доказать, что $\boldsymbol{P}(ABC) = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B) \cdot \boldsymbol{P}(C)$.

Допустим, что $AB = D$. Тогда $\boldsymbol{P}(ABC) = \boldsymbol{P}(DC) = \boldsymbol{P}(D) \times \boldsymbol{P}(C) = \boldsymbol{P}(AB) \cdot \boldsymbol{P}(C) = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B) \cdot \boldsymbol{P}(C)$.

Рассмотрение этого примера подводит к обобщению правила умножения вероятностей для произвольного числа событий. В случае независимости событий соответствующая формула принимает вид

$$\boldsymbol{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \boldsymbol{P}(A_1) \cdot \boldsymbol{P}(A_2) \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{P}(A_n). \tag{5.5}$$

3. Подбрасывают 3 монеты. Найти вероятность выпадения гербов на всех трех монетах.

Обозначим события:

A_1 — «появление герба при бросании первой монеты»,

A_2 — «появление герба при бросании второй монеты»,

A_3 — «появление герба при бросании третьей монеты».

Поскольку события A_1, A_2, A_3 совместимы и независимы, то на основании вывода, полученного при рассмотрении второго примера, получим:

$$\boldsymbol{P}(A_1 A_2 A_3) = \boldsymbol{P}(A_1) \cdot \boldsymbol{P}(A_2) \cdot \boldsymbol{P}(A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

4. Если события A и B независимы, то события A и $\overline{B}$ так же независимы.

Действительно, поскольку A и B независимы, то $\boldsymbol{P}(B/A) = \boldsymbol{P}(B)$ и $\boldsymbol{P}(\overline{B}/A) = 1 - \boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}(\overline{B})$.

Аналогично убеждаемся, что в случае независимости событий A и B независимыми будут события B и $\overline{A}$.

---

[1] Несколько событий называются независимыми, если любое из них не зависит от любой совокупности остальных. Для независимости событий в их совокупности недостаточно, чтобы они были попарно независимы.

Предлагаем вам самостоятельно установить, что в этом случае независимыми будут также события $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть требуется найти вероятность события A, которое происходит вместе с одним из несовместимых событий B_1, B_2, B_3, ..., B_n, образующих полную группу попарно-несовместимых событий. Если A произошло вместе с одним из событий B_1, B_2, B_3, ..., B_n, значит, произошло одно из несовместимых событий:

$$AB_1, \ AB_2, \ AB_3, \ \ldots, \ AB_n.$$

Таким образом, событие A представляет или событие AB_1, или AB_2, или AB_3, ..., или AB_n, а это означает, что

$$A = AB_1 + AB_2 + AB_3 + \ldots + AB_n.$$

Поскольку события B_1, B_2, B_3, ..., B_n взаимно несовместимы, то и события AB_1, AB_2, AB_3, ..., AB_n обладают тем же свойством. Поэтому

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(AB_1) + \boldsymbol{P}(AB_2) + \boldsymbol{P}(AB_3) + \ldots + \boldsymbol{P}(AB_n). \tag{5.6}$$

По формуле (5.3)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(AB_1) &= \boldsymbol{P}(A/B_1) \cdot \boldsymbol{P}(B_1), \\ \boldsymbol{P}(AB_2) &= \boldsymbol{P}(A/B_2) \cdot \boldsymbol{P}(B_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{P}(AB_n) &= \boldsymbol{P}(A/B_n) \cdot \boldsymbol{P}(B_n). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(A/B_1) \cdot \boldsymbol{P}(B_1) + \boldsymbol{P}(A/B_2) \cdot \boldsymbol{P}(B_2) + \ldots + \boldsymbol{P}(A/B_n) \cdot \boldsymbol{P}(B_n). \tag{5.7}$$

Равенство (5.7) носит название *формулы полной вероятности*. С помощью этой формулы легко находим так называемую *формулу Бейеса*

$$\boldsymbol{P}(B_i/A) = \frac{\boldsymbol{P}(B_i) \cdot \boldsymbol{P}(A/B_i)}{\boldsymbol{P}(A/B_1) \cdot \boldsymbol{P}(B_1) + \boldsymbol{P}(A/B_2) \cdot \boldsymbol{P}(B_2) + \ldots + \boldsymbol{P}(A/B_n) \cdot \boldsymbol{P}(B_n)} \tag{5.8}$$

при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Особенно широко она применяется при решении задач, связанных с вероятностной оценкой гипотез.

Докажем справедливость формулы Бейеса.

По формуле (5.3)

$$\boldsymbol{P}(AB_i) = P(A/B_i) \cdot P(B_i)$$

и

$$\boldsymbol{P}(AB_i) = \boldsymbol{P}(B_i/A) \cdot \boldsymbol{P}(A).$$

Из последнего равенства находим:

$$P(B_i/A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)}.$$

Подставляя значение $P(A)$, из формулы полной вероятности (5.7) получаем формулу Бейеса.

Примеры

1. Охотник сделал три выстрела по кабану. Вероятность попадания первым выстрелом 0,4, вторым — 0,5, третьим — 0,7. Одним попаданием кабана можно убить с вероятностью 0,2, двумя попаданиями с вероятностью 0,6, а тремя — наверняка. Найти вероятность того, что кабан будет убит.

Рассмотрим несовместимые события, составляющие полную группу: A_0, A_1, A_2, A_3.

A_0 — «промах»,
A_1 — «одно попадание»,
A_2 — «два попадания»,
A_3 — «три попадания»,
B_1 — «попадание с первого выстрела»,
B_2 — «попадание со второго выстрела»,
B_3 — «попадание с третьего выстрела»,
A — «кабан убит».

Согласно формуле полной вероятности

$$P(A) = P(A_0) \cdot P(A/A_0) + P(A_1) \cdot P(A/A_1) + P(A_2) \times \times P(A/A_2) + P(A_3) \cdot P(A/A_3).$$

Вспомнив, что события, противоположные событиям B_1, B_2, B_3, обозначаются соответственно $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$, $\overline{B}_3$, имеем:

$$A_0 = \overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3,$$
$$A_1 = B_1\overline{B}_2\overline{B}_3 + \overline{B}_1B_2\overline{B}_3 + \overline{B}_1\overline{B}_2B_3,$$
$$A_2 = B_1B_2\overline{B}_3 + B_1\overline{B}_2B_3 + \overline{B}_1B_2B_3,$$
$$A_3 = B_1B_2B_3.$$

Поскольку B_1, B_2, B_3 независимы и $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$, $\overline{B}_3$ независимы, то

$$P(A_0) = P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3),$$
$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1) \times \times P(\overline{B}_2) \cdot P(B_3),$$
$$P(A_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B}_3) + P(B_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(B_3) + + P(\overline{B}_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3),$$
$$P(A_3) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3).$$

Из условия задачи известно, что $P(B_1) = 0{,}4$; $P(B_2) = 0{,}5$; $P(B_3) = 0{,}7$;

отсюда находим $P(\overline{B}_1) = 0{,}6$; $P(\overline{B}_2) = 0{,}5$; $P(\overline{B}_3) = 0{,}3$. Поэтому

$$P(A_0) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}09,$$

$$P(A_1) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}36;$$

$$P(A_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}41;$$

$$P(A_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}14.$$

Из условия следует

$$P(A/A_0) = 0; \quad P(A/A_1) = 0{,}2; \quad P(A/A_2) = 0{,}6; \quad P(A/A_3) = 1.$$

Подставляя эти результаты в формулу полной вероятности, получим:

$$P(A) = 0{,}09 \cdot 0 + 0{,}36 \cdot 0{,}2 + 0{,}41 \cdot 0{,}6 + 0{,}14 \cdot 1 = 0{,}458.$$

Оказывается, что тремя выстрелами не так просто положить на лопатки кабана. Охотникам, впрочем, это хорошо известно.

2. В одном из трех ящиков 6 белых и 4 черных шарика, во втором — 7 белых и 3 черных, в третьем — только 8 белых. Наугад выбираем один из трех ящиков и из него снова наугад выбираем один шарик. Он оказался белым. Какова вероятность того, что этот шарик вынут из второго ящика?

Обозначим события:

A_1 — «наугад выбран первый ящик»,
A_2 — «наугад выбран второй ящик»,
A_3 — «наугад выбран третий ящик»,
A — «наугад вынут белый шарик».
Ясно, что

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Далее легко находим:

$$P(A/A_1) = \frac{3}{5}, \quad P(A/A_2) = \frac{7}{10}, \quad P(A/A_3) = 1.$$

По формуле Бейеса (5.8) искомая вероятность

$$P(A_2/A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{7}{23}.$$

3. Из 10 учеников, которые пришли на экзамен по математике, трое подготовились отлично, четверо хорошо, двое удовлетворительно, а один совсем не готовился — понадеялся на то, что все помнит. В билетах 20 вопросов. Отлично подготовившиеся ученики могут ответить на все 20 вопросов, хорошо — на 16 вопросов, удовлетворительно — на 10 и неподготовившийся — на 5 вопросов. Каждый ученик получает наугад 3 вопроса из 20. Приглашенный первым ученик ответил на все 3 вопроса. Какова вероятность того, что он отличник?

Обозначим события:

A_1 — «приглашен ученик, подготовившийся на отлично»,

A_2 — «приглашен ученик, подготовившийся хорошо»,
A_3 — «приглашен ученик, подготовившийся удовлетворительно»,
A_4 — «приглашенный ученик к экзаменам не готов»,
A — «приглашенный ученик ответил на 3 вопроса».

Согласно условию задачи

$P(A_1) = 0{,}3;\quad P(A_2) = 0{,}4;\quad P(A_3) = 0{,}2;\quad P(A_4) = 0{,}1.$

Кроме того, ясно:

$$P(A/A_1) = 1,\ P(A/A_2) = \frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\approx 0{,}491,$$

$$P(A/A_3) = \frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{8}{18}\approx 0{,}105,\ P(A/A_4) = \frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}\approx 0{,}009.$$

Следует найти $P(A_1/A)$.

По формуле Бейеса (5.8).

$$P(A_1/A) = \frac{0{,}3\cdot 1}{0{,}3\cdot 1 + 0{,}4\cdot 0{,}491 + 0{,}2\cdot 0{,}105 + 0{,}1\cdot 0{,}009}\approx 0{,}58.$$

Как видно, искомая вероятность сравнительно невелика. Поэтому учителю придется предложить ученику еще несколько дополнительных вопросов.

Упражнения

84. В ящике 10 белых и 8 красных шариков. Одновременно наугад вынимают 2 шарика. Какова вероятность того, что они разных цветов?

85. В ящике 7 белых и 9 черных шариков. Наугад вынимают один шарик, рассматривают его на свету и кладут обратно в ящик. Опять наугад вынимают один шарик. Какова вероятность, что оба шарика белые?

86. 10 участников собрания носят галоши одинакового размера. Уходя с собрания домой, они вынуждены галоши надевать в темном коридоре, поэтому не могут отличить своих галош от чужих галош того же номера. Чему равна вероятность того, что каждый из участников собрания вернется домой в своих галошах?

87. Из N выпускаемых с конвейера деталей допускаются M нестандартных. С целью контроля качества наугад отобраны n деталей. Получено указание: если среди них m окажутся нестандартными, то следует забраковать всю партию. Какова вероятность того, что партия деталей будет забракована?

88. Вероятность обнаружения туберкулезного заболевания при одной рентгеноскопии $\frac{3}{4}$. Чему равна вероятность, что заболевание будет раскрыто при трех рентгеноскопиях?

89. В лотерее выпущено n билетов, m из которых выигрывают. Гражданин купил k билетов. Какова вероятность того, что по крайней мере один из купленных билетов выигрышный?

90. Из колоды, содержащей 52 карты, наугад вынимают 4 карты. Найдите вероятность того, что все эти карты разных мастей?

91. Вероятность, что при нажиме стартера мотор машины заработает, равна $\frac{5}{6}$. Чему равна вероятность, что при повторном нажиме стартера выключают мотор?

92. Корабль-мишень обстреливается ракетами. Вероятность попадания каждой ракетой $\frac{9}{10}$. Корректировки стрельбы нет, и поэтому попадания — независимые события. Вероятность того, что попавшая в цель ракета потопит корабль, $\frac{2}{3}$. Обстрел ведется до тех пор, пока корабль потоплен или пока не исчерпаны запасы ракет. Ракетный катер, атакующий корабль, вооружен 5 ракетами. Чему равна вероятность того, что корабль будет потоплен до того момента, когда катер использует весь запас ракет?

93. У рыбака есть 3 излюбленных места рыбалки. Эти места он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность того, что рыба клюнет в первом месте, $\frac{1}{3}$, во втором — $\frac{1}{2}$, в третьем — $\frac{1}{4}$. Известно, что рыбак забросил удочку 3 раза, а вытащил только одну рыбу. Какова вероятность того, что он рыбачил в первом из его излюбленных мест?

94. Путешественник может купить билет в одной из трех касс железнодорожного вокзала. Вероятность того, что он направится к первой кассе, $\frac{1}{2}$, ко второй — $\frac{1}{3}$, к третьей — $\frac{1}{6}$. Вероятности того, что билетов уже нет в кассах, такие: в первой кассе $\frac{1}{5}$, во второй — $\frac{1}{6}$, в третьей — $\frac{1}{8}$. Путешественник обратился в одну из касс и получил билет. Определите вероятность того, что он направился к первой кассе.

95. В одном из ящиков 10 белых и 6 черных шариков, во втором — 7 белых и 9 черных. Произвольно выбирают ящик и из него наугад вынимают шарик. Он белый. Чему равна вероятность того, что и второй шарик, наугад вынутый из этого ящика, окажется белым?

96. Из полного набора костей домино произвольно берутся две кости. Определить вероятность того, что, следуя обычным правилам, вторую кость можно приставить к первой.

97. При разрыве снаряда образуются осколки трех весовых категорий: крупные, средние и мелкие, причем число крупных, средних и мелких осколков составляет соответственно 0,1; 0,3; 0,6 общего числа осколков.

При попадании в броню крупный осколок пробивает ее с вероятностью 0,9, средний — с вероятностью 0,2 и мелкий — с вероятностью 0,05. В броню попал один осколок и пробил ее. Найдите вероятности того, что эта пробоина причинена: крупным, средним и мелким осколком.

98. Рабочий обслуживает 5 станков. 20% времени он уделяет первому станку, 10% — второму, 18% — третьему, 25% — четвертому и 30% — пятому. Какова вероятность того, что случайно заглянувший в цех мастер найдет рабочего:

а) у первого или третьего станка;

б) у первого или пятого станка;

в) у первого или четвертого станка;

г) у первого, у второго или у третьего станка?

99. Группе студентов для прохождения производственной практики выделено 30 мест: 15 — в Туле, 8 — во Владимире, 7 — в Калуге. Какова вероятность того, что студент и студентка, которые в скором времени собираются справить свадьбу, будут посланы для прохождения практики в один и тот же город, если декан ничего не знает об их «семейных» делах?

100. Вероятность улучшения спортсменом личного достижения по прыжку с шестом равна p. Чему равна вероятность того, что он улучшит свой результат, если ему предоставлена возможность прыгать 2 раза?

101. Два зенитных орудия ведут огонь по одному и тому же самолету. Вероятность попадания выстрелом из первого орудия 0,2, из второго — 0,6. Первым залпом в самолет попали только из одного орудия. Какова вероятность того, что промахнулся расчет первого орудия?

102. Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой в разные стороны ведут пять дорог. Если турист пойдет по первой дороге, то вероятность выхода туриста из леса в течение часа составляет 0,6; если по второй — 0,3; если по третьей — 0,2; если по четвертой — 0,1; если по пятой — 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если он через час вышел из леса?

103. Какова вероятность того, что при n бросаниях игральной кости хотя бы один раз появится шестерка? Хотя бы два раза пятерка?

VI. НЕЗАВИСИМЫЕ ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ

1. ФОРМУЛА Я. БЕРНУЛЛИ

Несколько раз бросаем монету. Появление герба, скажем, при четвертом бросании, не зависит от того, каковы были результаты при первом, при втором и при третьем бросаниях. Мы имеем дело с независимыми испытаниями. Решим теперь такую задачу.

При проведении некоторого однократного испытания вероятность появления события A равна p, а непоявления — $q = 1 - p$. Какова вероятность того, что при n повторных испытаниях событие A произойдет m раз? Это событие запишем так: $(S_n = m)$.

Станем искать

$$\boldsymbol{P}(S_n = m).$$

Обозначим события:

A_1 — «появление события A при первом испытании»,
A_2 — «появление события A при втором испытании»,
A_3 — «появление события A при третьем испытании»,
. . . .
A_m — «появление события A при m-м испытании»,
. . . .
A_n — «появление события A при n-м испытании»,
$\bar{A}_n$ — «непоявление события A при n-м испытании».

Если так, то событие, вероятность которого $\boldsymbol{P}(S_n = m)$, может быть представлено записью

$$\begin{gathered} A_1A_2 \ldots A_m\bar{A}_{m+1}\bar{A}_{m+2} \ldots \bar{A}_n + \\ + A_1A_2 \ldots A_{m-2}A_{m-1}\bar{A}_mA_{m+1}\bar{A}_{m+2} \ldots \bar{A}_n + \ldots + \\ + \bar{A}_1\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{n-m}A_{n-m+1}A_{n-m+2} \ldots A_n, \end{gathered}$$

и искомая вероятность, в силу независимости событий A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n$ и в силу несовместимости событий

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1A_2 \ldots A_m\bar{A}_{m+1} \ldots \bar{A}_n, \\ B_2 &= A_1A_2 \ldots A_{m-1}\bar{A}_mA_{m+1}\bar{A}_{m+2} \ldots \bar{A}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

может быть записана так:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{P}(S_n = m) = \boldsymbol{P}(B_1 + B_2 + \ldots) = \boldsymbol{P}(A_1A_2 \ldots A_m\bar{A}_{m+1} \ldots \\ \ldots \bar{A}_n) + \boldsymbol{P}(A_1A_2 \ldots A_{m-1}\bar{A}_mA_{m+1}\bar{A}_{m+2} \ldots \bar{A}_n) + \\ + \boldsymbol{P}(\bar{A}_1\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{n-m}A_{n-m+1} \ldots A_n) = pp \ldots pqq \ldots q + \\ + pp \ldots pqpqq \ldots q + \ldots + qq \ldots qpp \ldots p. \end{gathered}$$

У каждого из членов этой суммы m сомножителей p и $n - m$ сомножителей q, поэтому

$$\boldsymbol{P}(S_n = m) = \underbrace{p^mq^{n-m} + p^mq^{n-m} + \ldots + p^mq^{n-m}}_{C_n^m \text{ раз}}$$

$$\boldsymbol{P}(S_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \tag{6.1}$$

или

$$\boldsymbol{P}(S_n = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}. \tag{6.2}$$

Это так называемое *биномиальное распределение вероятностей*. Рассуждения, которые к нему привели, часто называют схемой Я. Бернулли, по имени математика, который первым ее рассмотрел.

С помощью формулы (6.1) можно найти значение $S_n = m_0$, которому соответствует наибольшая вероятность.

Поскольку

$$\frac{P(S_n = m)}{P(S_n = m-1)} = 1 + \frac{(n+1)p - m}{mq},$$

то

$$\begin{aligned} P(S_n = m) &> P(S_n = m-1) \quad \text{при } m < (n+1)p, \\ P(S_n = m) &< P(S_n = m-1) \quad \text{при } m > (n+1)p, \\ P(S_n = m) &= P(S_n = m-1) \quad \text{при } m = (n+1)p, \end{aligned}$$

если $(n+1)p$ — целое число.

Поэтому вероятнейшее значение $S_n = m_0$ должно удовлетворять условию

$$(n+1)p - 1 \leqslant m_0 \leqslant (n+1)p.$$

Поскольку $p = 1 - q$, то

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p.$$

Примеры

1. Подбрасываем монету 10 раз. Какова вероятность двукратного появления герба?

В этом случае $n = 10$, $m = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$;

тогда

$$P(S_{10} = 2) = C_{10}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{45}{1024} \approx 0{,}04395.$$

2. Вероятность попадания в мишень одним выстрелом — $\frac{1}{8}$. Какова вероятность того, что из 12 выстрелов не будет ни одного попадания?

Имеем: $n = 12$, $m = 0$, $p = \frac{1}{8}$, $q = \frac{7}{8}$. По формуле (6.1)

$$P(S_{12} = 0) = C_{12}^0 \left(\frac{1}{8}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{12} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{12} \approx 0{,}2514.$$

3. Подводная лодка атакует крейсер, выпуская по нему одну за другой 4 торпеды. Вероятность попадания каждой торпедой равна $\frac{3}{4}$. Любая из торпед с одинаковой вероятностью может пробить один из 10 отсеков крейсера, которые в результате попадания наполняются водой. При заполнении хотя бы двух отсеков крейсер тонет. Вычислить вероятность гибели крейсера.

Обозначим события:

A_1 — «попадание одной торпедой»,
A_2 — «попадание двумя торпедами»,
A_3 — «попадание тремя торпедами»,
A_4 — «попадание четырьмя торпедами»,

A — «крейсер потоплен».

Согласно формуле (6.1)

$$P(A_1)=C_4^1\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{3}{64},\quad P(A_2)=C_4^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128},$$

$$P(A_3)=C_4^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{27}{64},\quad P(A_4)=C_4^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{81}{256},$$

$$P(A/A_1)=0,\ P(A/A_2)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10},$$

$$P(A/A_3)=1-\frac{1}{10^2}=\frac{99}{100},\ P(A/A_4)=1-\frac{1}{10^3}=\frac{999}{1000}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{3}{64}\cdot 0+\frac{27}{128}\cdot\frac{9}{10}+\frac{27}{64}\cdot\frac{99}{100}+\frac{81}{256}\cdot\frac{999}{1000}\approx 0{,}9237.$$

У крейсера противника мало шансов на спасение!

Упражнения

104. В телевизоре 10 ламп. Для любой из ламп вероятность, что она останется исправной в течение года, равна p. Какова вероятность того, что:

а) в течение года хотя бы одна лампа выйдет из строя;

б) в течение года выйдет из строя ровно одна лампа;

в) в течение года выйдут из строя две лампы?

105. Юноша, желающий стать военным летчиком, должен пройти 4 испытания. Вероятность успешного выполнения им заданий первого испытания 0,9, второго — 0,95, третьего — 0,8 и четвертого — 0,85. Какова вероятность того, что:

а) юноша с успехом пройдет все испытания;

б) юноша успешно пройдет два испытания;

в) юноша с успехом пройдет не меньше двух испытаний?

106. С разных позиций по мишени выпускают 4 выстрела. Вероятность попадания первым выстрелом 0,1, вторым — 0,2, третьим — 0,3 и четвертым — 0,4.

Какова вероятность того, что все четыре выстрела — промахи?

107. В квартире 4 электролампочки. Для каждой лампочки вероятность того, что она останется исправной в течение года, равна $\frac{5}{6}$. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не меньше половины лампочек?

108. Проводятся 3 испытания, каждое из которых может завершиться результатом A_1 — с вероятностями p_{11}, p_{12}, p_{13}, результатом A_2 — с вероятностями p_{21}, p_{22}, p_{23}, результатом A_3 — с вероятностями p_{31}, p_{32}, p_{33} и результатом A_4 — с вероятностями p_{41}, p_{42}, p_{43}. Какова вероятность того, что при проведении трех испытаний событие A_1 произойдет один раз, событие A_2 — два раза, а события A_3 и A_4 совсем не произойдут?

109. Вы играете в шахматы с равным по силе партнером. Чего следует больше ожидать: трех побед в 4 партиях или пяти побед в 8 партиях?

110. Случайно встреченное лицо с вероятностью 0,2 может оказаться брюнетом, с вероятностью 0,3 — шатеном, с вероятностью 0,4 — блондином и с вероятностью 0,1 — рыжим. Какова вероятность того, что среди шести случайно встреченных лиц:

а) не меньше 4 блондинов;

б) хотя бы один рыжий;

в) 3 блондина и 3 шатена?

111. Мишень в тире состоит из «яблока» и двух концентрических «колец». Вероятность попадания в «яблоко» одним выстрелом $\frac{1}{10}$, в первое «кольцо» — $\frac{1}{5}$, во второе — $\frac{2}{5}$, вероятность промахнуться $\frac{3}{10}$. По мишени выпущено 5 выстрелов. Какова вероятность двух попаданий в «яблоко» и одного попадания во второе «кольцо»?

112. В лагере m пионеров. Они зажгли n костров и случайным образом распределились около них. Какова вероятность того, что у первого костра сели k пионеров?

113. При проведении некоторого испытания вероятность появления ожидаемого результата 0,01. Сколько раз его нужно провести, чтобы с вероятностью 0,5 можно было бы ожидать хотя бы одного появления этого результата?

114. Рабочий обслуживает 12 одинаковых станков. Вероятность того, что в течение часа станок потребует регулировки, равна $\frac{1}{3}$. Какова вероятность того, что в течение часа рабочему придется регулировать 4 станка?

115. Какова вероятность того, что при 24-кратном бросании двух игральных костей хотя бы один раз появятся две шестерки (задача шевалье де Мере)?

116. В учреждении 10 служащих, которые одновременно обедают в одном из двух кафе, расположенных недалеко от места их работы. Сколько мест необходимо резервировать в каждом кафе для сотрудников этого учреждения, чтобы заведующие кафе с гарантией в 95% могли быть уверены, что мест в кафе во время обеда для сотрудников упомянутого учреждения хватит?

117. В магазин зашли n лиц. Найдите вероятность события, состоящего в том, что m из них будут что-нибудь покупать. Вероятность, что любой из посетителей не уйдет без покупки, равна p. Вычислите значение искомой вероятности, если:

а) $n = 8$; $p = 0{,}3$; $m = 3$;

б) $n = 12$; $p = 0{,}2$; $m = 4$;

в) $n = 9$; $p = 0{,}4$; $m = 5$.

118. Сколько раз придется бросать игральную кость, чтобы вероятнейшее число появления шестерки было бы 32?

119. Чему равно вероятнейшее число ясных дней в сентябре этого года в данной местности, если наблюдения многих лет показывают, что в среднем 11 дней сентября здесь пасмурны?

120. Из всей продукции обувной фабрики 31% составляют изделия высшего сорта. Сколько пар ботинок высшего сорта можно надеяться найти среди 75 пар, поступивших с этой фабрики в магазин?

121. С помощью автоматического станка изготовлено 90 деталей. Какова вероятность того, что изготовленная деталь первого сорта, если в упомянутой партии изготовленных деталей вероятнейшее число деталей первого сорта 82?

2. ФОРМУЛА МУАВРА — ЛАПЛАСА

Познакомимся с наиболее важным открытием замечательного французского математика А. Муавра в теории вероятностей. Медиками установлено, что 94% лиц, которым сделаны прививки против туберкулеза, отличаются иммунитетом против этого заболевания. Какова вероятность того, что среди 100 000 граждан, получивших прививки, 5800 не защищены от заболевания туберкулезом?

Эту задачу можно было бы решать с помощью формулы (6.1). В нашем случае $n = 100\,000$, $m = 5800$, $p = 0{,}06$, $q = 0{,}94$. Если интересующие нас события обозначим A, то

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(S_{100\,000} = 5800) = C_{100\,000}^{5800}\,(0{,}06)^{5800}\,(0{,}94)^{94\,200}.$$

Нетрудно убедиться в том, что попытка получить окончательный результат непосредственным вычислением — сизифов труд, даже если воспользоваться логарифмами. Как быть?

Аналогичную задачу для $p = \frac{1}{2}$ рассматривал Муавр, а для любого $0 < p < 1$ — Лаплас. Проследим путь рассуждений последнего.

Известно, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71828\ \ldots .$$

С помощью формулы (6.1) Лаплас доказал, что для достаточно большого n при $p \neq 0$ и $q \neq 0$

$$\boldsymbol{P}(S_n = m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}. \tag{6.3}$$

Обозначим

$$\frac{m-np}{\sqrt{npq}} = x \text{ и } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Тогда

$$P(S_n = m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}. \qquad (6.4)$$

Значения функции $\varphi(x)$ представлены в таблице 2 в конце книги. С графиком этой функции читатель уже знаком (рис. 3).

Примеры

1. Решить задачу, условие которой дано в начале этого пункта. По формуле (6.4)

$$P(S_{100\,000} = 5800) \approx \frac{\varphi\left(\frac{5800 - 100\,000 \cdot 0,06}{\sqrt{100\,000 \cdot 0,06 \cdot 0,94}}\right)}{\sqrt{100\,000 \cdot 0,06 \cdot 0,94}}.$$

$$\sqrt{100\,000 \cdot 0,06 \cdot 0,94} \approx 75, \quad x \approx -2,7.$$

Отыскивая значение $\varphi(x)$ по таблице 2, не обращаем внимания на знак x, так как $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Находим $\varphi(2,7) = 0,0104$. Тогда

$$P(S_{100\,000} = 5800) \approx 0,000139.$$

2. Вероятность встретить на улице своего учителя 0,002. Какова вероятность того, что среди 1200 случайных прохожих вы встретите не более 3 своих учителей?

Пусть A_0 — событие, состоящее в том, что вы своих учителей не встретите, A_i — событие, состоящее в том, что вы встретите ровно i своих учителей. Тогда событие A, состоящее в том, что вы встретите не больше 3 учителей, равно сумме вышеупомянутых событий, т. е.

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3.$$

Но события A_0, A_1, A_2, A_3 несовместимы, поэтому

$$P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

По формуле (6.4)

$$P(A_0) = P(S_{1200} = 0) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1200 \cdot 0,002 \cdot 0,998}} \varphi\left(\frac{0 - 1200 \cdot 0,002}{\sqrt{1200 \cdot 0,002 \cdot 0,998}}\right) = 0,0775;$$
$$P(A_1) = P(S_{1200} = 1) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1200 \cdot 0,002 \cdot 0,998}} \varphi\left(\frac{1 - 1200 \cdot 0,002}{\sqrt{1200 \cdot 0,002 \cdot 0,998}}\right) = 0,1719;$$
$$P(A_2) = P(S_{1200} = 2) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1200 \cdot 0,002 \cdot 0,998}} \varphi\left(\frac{2 - 1200 \cdot 0,002}{\sqrt{1200 \cdot 0,002 \cdot 0,998}}\right) = 0,2505;$$
$$P(A_3) = P(S_{1200} = 3) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1200 \cdot 0,002 \cdot 0,998}} \varphi\left(\frac{3 - 1200 \cdot 0,002}{\sqrt{1200 \cdot 0,002 \cdot 0,998}}\right) = 0,2389.$$

Тогда $P(A) = 0{,}0775 + 0{,}1719 + 0{,}2505 + 0{,}2389 = 0{,}7388$.

Таким образом, гарантия того, что вы встретите не более 3 своих учителей, составляет приблизительно 74%.

Упражнения

122. Чему равна вероятность того, что среди 100 случайных прохожих окажутся 32 женщины (предполагаем, что количество мужчин в городе равно количеству женщин)?

123. Допустим, что с вероятностью 0,6 изготовленная деталь будет забракована. Сколько бракованных деталей из 1000 можно ожидать с вероятностью 0,9?

124. Предположим, что вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,8. Сколько вылечившихся из 100 больных можно ожидать с вероятностью 0,75?

125. Баскетболист забрасывает штрафной с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что все 20 его бросков будут удачные?

126. Бросаем монету. Какова вероятность того, что при 10 бросаниях ни разу не появится герб?

127. Два мальчика играют в кости. Каждый бросает 2 кости. Мальчик A выигрывает партию, если при 20 бросках 2 раза появляется в сумме 11 очков, мальчик B — если при 10 бросках 2 раза появляется в сумме 9 очков. Чья удача более вероятна?

128. Бросаем монету 40 раз. Чему равна вероятность того, что герб появится 25 раз?

129. По данным телевизионного ателье, в течение гарантийного срока выходит из строя в среднем 12% кинескопов. Какова вероятность того, что из 46 наугад выбранных кинескопов 36 проработают гарантийный срок?

130. Вероятность рождения мальчика 0,515. Чему равна вероятность того, что среди 80 новорожденных 42 мальчика?

131. Вероятность попадания в мишень 0,3. Какова вероятность того, что при 30 выстрелах произойдет 8 попаданий?

132. При проведении некоторого испытания вероятность появления события A равна 0,5. Сколько раз предполагается ожидать появление A с вероятностью 0,048 при 100 испытаниях?

3. ФОРМУЛА ПУАССОНА

Когда p близко к 0 или 1, формула Муавра дает результаты, которые значительно отклоняются от результатов, полученных по формуле (6.1). Рассмотрим случай, когда при возрастании n вероятность p появления интересующего нас события убывает, а $np = k$ — постоянное число.

Именно такая ситуация возникает, когда имеем дело с редко происходящими событиями.

По формуле (6.2)

$$P(S_n = m) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} p^m (1-p)^{n-m}.$$

Поскольку $p = \frac{k}{n}$,

$$P(S_n = m) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{k}{n}\right)^m\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{k^m}{m!}\left(1-\frac{k}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^m}.$$

Если обозначим

$$\alpha_n = \left(1-\frac{k}{n}\right)^n, \quad \beta_n = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^m}, \text{ то}$$

$$P(S_n = m) = \frac{k^m}{m!}\alpha_n\beta_n. \tag{6.5}$$

Установим предельные значения α_n и β_n при неограниченном возрастании n. Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^m} = 1,$$

$$\alpha_n = \left(1-\frac{k}{n}\right)^n = \left(\left(1+\left(-\frac{k}{n}\right)\right)^{-\frac{n}{k}}\right)^{-k}.$$

Обозначим $h = -\frac{n}{k}$. Тогда

$$\alpha_n = \left(\left(1+\frac{1}{h}\right)^h\right)^{-k}.$$

Поскольку $k \geqslant 0$, то при $n \to \infty$, $h \to -\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{h\to-\infty}\left(\left(1+\frac{1}{h}\right)^h\right)^{-k} = \left(\lim_{h\to-\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h\right)^{-k} = \left(\lim_{h\to-\infty}\left(\frac{h+1}{h}\right)^h\right)^{-k} =$$

$$= \left(\lim_{h\to-\infty}\left(\frac{h+1-1}{h+1}\right)^{-h}\right)^{-k} = \left(\lim_{h\to-\infty}\left(1-\frac{1}{h+1}\right)^{-h-1}\cdot\left(1-\frac{1}{h+1}\right)\right)^{-k}.$$

Пусть $h+1 = -x$, тогда при $h \to -\infty$, $x \to \infty$. Получаем

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{-k} = e^{-k}.$$

Значит, когда n велико, то

$$a_n \approx e^{-k}, \quad \beta_n \approx 1.$$

Подставляя эти значения в (6.5), находим формулу Пуассона:

$$P(S_n = m) \approx \frac{k^m}{m!} e^{-k}. \qquad (6.6)$$

Примеры

1. Какова вероятность того, что среди 500 наугад выбранных человек двое родились 1-го мая?

Естественно считать, что день рождения незнакомого человека может быть с равной вероятностью любым днем года.

Нам предстоит вычислить $P(S_{500} = 2)$. Так как $n = 500$, $m = 2$, $p = \frac{1}{365}$, то $k = \frac{500}{365} \approx 1{,}3699$. По формуле (6.6)

$$P(S_{500} = 2) \approx \frac{1{,}3699^2}{2!} e^{-1{,}3699} \approx 0{,}2385.$$

При вычислении этого и подобных выражений полезно пользоваться таблицей 3. Полезно также запомнить, что

$$\lg e^{-k} = -k \cdot 0{,}4342945.$$

2. Среди 1000 человек приблизительно 8 левшей. Какова вероятность того, что среди сотни наугад выбранных человек не окажется ни одного левши?

В этом случае $n = 100$, $m = 0$, $p = 0{,}008$. Отсюда $k = 0{,}8$.

$$P(S_{100} = 0) \approx \frac{0{,}8^0}{0!} e^{-0{,}8} \approx 0{,}4493.$$

Упражнения

133. Какова вероятность того, что среди 500 наугад выбранных лиц:

а) пятеро родились 8 марта;

б) трое родились 10 июня;

в) ни один не родился 17 сентября?

134. В городе 1900 жителей. Какова вероятность того, что в году есть 4 дня, когда ни один житель города не отмечает свой день рождения?

135. Вероятность попадания в мишень 0,001. Какова вероятность того, что при 5000 выстрелов будет не меньше 2 попаданий?

136. Прядильщица обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва нитки на одном веретене в течение часа 0,005. Какова вероятность того, что в течение часа нитка оборвется не больше, чем на 10 веретенах?

137. Некачественные сверла составляют 2% всей продукции фабрики. Изготовленные сверла упаковываются в ящики по 100 штук. Какова вероятность того, что:

а) в ящике не окажется некачественных сверл;

б) в ящике окажется не больше 3 некачественных сверл?

Сколько сверл необходимо упаковать в ящик, чтобы с вероятностью не меньше 0,9 в ящике было 100 доброкачественных сверл?

138. Частные конторы страхования жизни в капиталистических странах заинтересованы в получении прибыли за счет своих клиентов.

В одной такой конторе застраховано 10 000 клиентов одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти клиента в течение года 0,006. Каждый клиент 1 января вносит 12 долларов. Если в течение года он умрет, то контора обязана выплатить его родственникам 1000 долларов. Чему равна вероятность того, что:

а) контора разорится;

б) контора получит не менее 40 000 долларов прибыли?

4. ФОРМУЛА ЛАПЛАСА

Решим следующую задачу.

Задача. Какова вероятность того, что при n испытаниях событие A произойдет не менее a и не более b раз?

Вспомним правило сложения вероятностей.

На его основании получим:

$$\boldsymbol{P}(a \leqslant S_n \leqslant b) = \boldsymbol{P}(S_n = a) + \boldsymbol{P}(S_n = a+1) + \\ + \ldots + \boldsymbol{P}(S_n = b-1) + \boldsymbol{P}(S_n = b).$$

Применив формулу Муавра (6.3), находим

$$\boldsymbol{P}(a \leqslant S_n \leqslant b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a+1-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} + \right. \\ \left. + \ldots + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{b-1-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}\right).$$

Задача как будто решена, но провести указанные вычисления очень трудно. Лапласу удалось доказать, что при достаточно большом n

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} + \ldots + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}\right) \approx \\ \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $y = \Phi(x)$ — специальная функция. Одно из характерных ее свойств нечетность:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{P}(a \leqslant S_n \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{6.7}$$

В таблице 4 приводятся значения функции Лапласа

$$y = \Phi(x).$$

Примеры

1. Какова вероятность того, что при 200-кратном бросании монеты число появления герба S_{200} удовлетворяет неравенству

$$95 \leqslant S_{200} \leqslant 105.$$

В этом случае $n = 200$, $a = 95$, $в = 105$, $q = p = \frac{1}{2}$. Поэтому

$$\frac{a - np}{\sqrt{npq}} = \frac{95 - 200 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \approx -0,7070,$$

$$\frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{105 - 200 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \approx 0,7070.$$

Теперь, используя формулу (6.7) и таблицу 4,

$$\boldsymbol{P}(95 \leqslant S_{200} \leqslant 105) \approx \Phi(0,7070) - \Phi(-0,7070) = \\ = 2\Phi(0,7070) = 2 \cdot 0,2612 = 0,5224.$$

2. Вероятность получения по лотерее проигрышного билета равна 0,1. Какова вероятность того, что среди 500 наугад купленных билетов не менее 48 и не более 55 безвыигрышных?

Здесь $n = 500$, $a = 48$, $b = 55$, $p = 0,1$, $q = 0,9$. Тогда

$$\frac{a - np}{\sqrt{npq}} = \frac{48 - 500 \cdot 0,1}{\sqrt{500 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} \approx -0,298,$$

$$\frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{55 - 500 \cdot 0,1}{\sqrt{500 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} \approx 0,745.$$

$$\boldsymbol{P}(48 \leqslant S_{500} \leqslant 55) \approx \Phi(0,745) + \Phi(0,298) = 0,3913.$$

3. Как установить вероятность того, что наугад выбранный десятиклассник собирает марки? Можно опросить некоторое число произвольно выбранных десятиклассников. Если среди n опрошенных окажется S_n коллекционеров марок, то искомая вероятность $p \approx \frac{S_n}{n}$. Сколько десятиклассников необходимо опросить, чтобы погрешность вычисления вероятности не превосходила бы 0,005, если желаем получить правильный результат с вероятностью 0,95?

Согласно условию задачи

$$\boldsymbol{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leqslant 0,005\right) = 0,95.$$

В силу (6.7) получаем:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\leqslant 0{,}005\right)=P\left(-0{,}005\leqslant\frac{S_n}{n}-p\leqslant 0{,}005\right)=$$
$$=\Phi(x)-\Phi(-x)=0{,}95.$$

Поэтому $2\Phi(x)=0{,}95$; и по таблице 4, которая на сей раз применяется в обратном порядке, находим $x=1{,}96$.
Тогда

$$0{,}005\geqslant 1{,}96\sqrt{\frac{pq}{n}},\quad n\geqslant 392^2\,pq.$$

Приближенно $n\geqslant 160\,000\,pq$. В силу $0\leqslant p\leqslant 1$, $0\leqslant q\leqslant 1$, $pq\leqslant\frac{1}{4}$, поэтому $n\geqslant 40\,000$.

Упражнения

139. Телефонная станция A, обслуживающая 2000 абонентов, соединяет их со станцией B. Устанавливать 2000 проводов от A до B не рационально. Сколько линий проводов необходимо провести от A до B, чтобы только один из сотни абонентов станции A, наугад выбравший момент разговора с абонентом станции B, нашел бы все линии занятыми? Вероятность того, что при случайном звонке линия занята, равна $\frac{1}{30}$.

140. 10 000 шариков произвольно распределяются по 9 ящикам. Какова вероятность того, что в первом ящике не менее 1100 и не более 1200 шариков?

141. Игральную кость бросаем 12 000 раз. Какова вероятность того, что шестерка появится не менее 1900 и не более 2100 раз?

142. Найти такое число k, чтобы при 1000-кратном бросании монеты число появлений герба S_{1000} удовлетворяло условию $470\leqslant S_{1000}\leqslant k$.

143. Из 10 винтовок 4 не проверены в прицельной стрельбе. Вероятность попадания в мишень из проверенной винтовки 0,9, из непроверенной 0,3. Из наугад выбранной винтовки выпущено по мишени 200 выстрелов. Какова вероятность того, что число попаданий S_{200} удовлетворяет неравенству $120\leqslant S_{200}\leqslant 150$?

144. Найти такое число k, чтобы с вероятностью 0,9 можно было бы утверждать, что среди 900 новорожденных более k мальчиков. Вероятность рождения мальчика 0,515.

145. 80% изделий, поступающих в магазин со склада, высшего сорта. Сколько изделий придется наугад взять со склада, чтобы с вероятностью 0,996 можно было утверждать: вероятность P события, что наугад выбранное изделие высшего сорта, удовлетворяет неравенству $0{,}75\leqslant P\leqslant 0{,}85$?

146. В каждом из 1000 ящиков 5000 белых и столько же черных шариков. Из каждого ящика наугад вынимаются по 3 шарика. Какова вероятность, что число ящиков, из которых вынуты 3 шарика одного цвета, не меньше чем 200 и не больше чем 310?

147. 70% продукции объединения «Юность» высшего сорта. Какова вероятность того, что среди 1000 изделий этого объединения высшего сорта будет не менее 682 и не более 760 изделий?

148. Вероятность рождения мальчика 0,515. Какова вероятность того, что среди 1000 новорожденных не меньше 480 и не больше 540 мальчиков?

149. Вероятность того, что саженец елки прижился и будет успешно расти, равна 0,8. Посажено 400 елочных саженцев. Какова вероятность того, что нормально вырастут не меньше 250 деревьев?

150. При 10 000-кратном бросании монеты герб появился 6000 раз. Можно ли считать монету симметричной?

151. В научно-исследовательском институте земледелия проверяется всхожесть кукурузы. Сколько семян необходимо посеять с вероятностью всхожести 0,99, чтобы частота всхожести отличалась бы от 0,95 меньше чем на 0,01?

152. Вероятность того, что смерть человека произойдет на 21 году жизни, 0,006. Застраховано 1000 двадцатилетних. Годовой взнос 15 руб. с каждого. В случае смерти застрахованного его родственникам выплачивается 1200 руб. Какова вероятность того, что в конце года выплата по страховкам превысит сумму страховых взносов?

VII. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Одно из самых важных понятий в теории вероятностей — случайная величина. Рассмотрим следующие примеры.

1. Наблюдая движение городского транспорта, замечаем, что число машин, проезжающих за один час через некоторый перекресток, под влиянием случайных обстоятельств меняется в течение суток.

2. Стреляя из одного и того же орудия при одном и том же прицеле и постоянных условиях, мы наблюдаем, что снаряды ложатся в разных местах. Расстояние места падения снаряда от места его вылета есть величина, которая в зависимости от случайных обстоятельств принимает разные значения.

3. Учет числа писем, поступающих в некоторое почтовое отделение, показывает, что ежедневное количество писем меняется в результате каких-то случайных причин.

Эти примеры отличаются по конкретному содержанию, но у них есть общие черты.

1) В каждом примере речь идет о величине, которая характеризует некоторое случайное событие.

2) Каждая из этих величин может принимать переменное числовое значение в зависимости от случайного исхода испытания.

Случайной величиной называем переменную, значения которой зависят от исхода испытаний и для которой определено распределение вероятностей.

Такие случайные величины, принимающие только отдельные друг от друга значения, которые можно заранее перечислить, называются дискретными случайными величинами. Создадим числовую модель такой величины.

Пусть несовместимые события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу. Введем понятие случайной величины следующим путем: если появляется событие A_i, то случайная величина ξ[1] принимает значение x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Таким образом, ξ является функцией на множестве событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т. е.

$$\xi(A_1) = x_1,\ \xi(A_2) = x_2,\ \ldots,\ \xi(A_n) = x_n.$$

Вместо того чтобы сказать «имеем событие A_i», мы теперь скажем «имеем событие $\xi = x_i$». Пусть $\boldsymbol{P}(A_i)$ — вероятность появления события A_i. Теперь эту же вероятность мы можем обозначать и так: $\boldsymbol{P}(\xi = x_i) = p_i$.

В общем случае имеет место:

$$\boldsymbol{P}(A_i) = \boldsymbol{P}(\xi = x_i) = p_i.$$

После введения случайной величины ξ, вместо того чтобы говорить «имеем полную группу несовместимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с вероятностями $\boldsymbol{P}(A_1), \boldsymbol{P}(A_2), \ldots, \boldsymbol{P}(A_n)$», скажем «имеем случайную величину ξ, которая принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$». (При этом, конечно, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.)

Задание случайной величины ξ можно осуществлять с помощью такой записи:

$$\xi: \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_n \end{pmatrix}$$

Набор $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называется распределением вероятностей. Иногда подобную модель представляют в виде таблицы:

ξ	x_1	x_2	x_3	. . . .	x_{n-1}	x_n
$\boldsymbol{P}$	p_1	p_2	p_3	. . . .	p_{n-1}	p_n

В частности, при бросании симметричной игральной кости наша вероятностная модель будет таковой:

$$\xi: \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

В случае n-кратного бросания монеты случайную величину ξ,

[1] ξ — буква греческого алфавита «кси».

обозначающую число появления герба, обозначим S_n. Тогда вероятностная модель.

$$S_n : \begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & \ldots, & n \\ C_n^0\left(\frac{1}{2}\right)^n, & C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)^n, & C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n, & \ldots, & C_n^n\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

При решении задач часто приходится пользоваться такими характеристиками случайной величины, как математическое ожидание и дисперсия.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

Пусть нам предстоит решать следующую задачу.

Выпущено 100 лотерейных билетов. 40 билетов принесут их владельцам по 1 руб., 10 — по 5 руб., 5 — по 10 руб. Остальные билеты безвыигрышные. Какой средний выигрыш соответствует одному билету?

Выигрыш является случайной величиной ξ, которая может принять значения 0, 1, 5, 10 с вероятностями соответственно $\frac{45}{100}$, $\frac{40}{100}$, $\frac{10}{100}$, $\frac{5}{100}$.

Распределение этой случайной величины можно представить таблицей:

ξ	0	1	5	10
P	0,45	0,4	0,1	0,05

Если покупатель приобретает все 100 билетов, то

0 руб. он выиграл бы 45 раз,
1 руб. он выиграл бы 40 раз,
5 руб. он выиграл бы 10 раз,
10 руб. он выиграл бы 5 раз.

Всего

$$0 \cdot 45 + 1 \cdot 40 + 5 \cdot 10 + 10 \cdot 5 \text{ рублей.}$$

Выигрыш, соответствующий одному билету, в 100 раз меньше, он равен

$$\frac{0 \cdot 45 + 1 \cdot 40 + 5 \cdot 10 + 10 \cdot 5}{100} =$$

$$= \boxed{0 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}05} = 1{,}4 \text{ рубля.}$$

Обратите внимание на выделенную рамкой сумму, сравните ее с таблицей распределения случайной величины ξ.

Вы должны заметить, как строится среднее значение выигрыша.

Перейдем к рассмотрению общего случая.

Пусть при проведении «n» независимых испытаний некоторая случайная величина ξ может принимать

$$\begin{aligned} &m_1 \text{ раз значение } x_1, \\ &m_2 \text{ раз значение } x_2, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ &m_k \text{ раз значение } x_k. \end{aligned}$$

Определим среднее значение этой случайной величины ξ. Согласно условиям испытаний

$$\begin{aligned} &P(\xi = x_1) = \frac{m_1}{n} = p_1, \\ &P(\xi = x_2) = \frac{m_2}{n} = p_2, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ &P(\xi = x_k) = \frac{m_k}{n} = p_k. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Просуммируем все значения случайной величины ξ, которые она принимает при проведении n испытаний:

$$\underbrace{x_1 + x_1 + \ldots + x_1}_{m_1 \text{ раз}} + \underbrace{x_2 + x_2 + \ldots + x_2}_{m_2 \text{ раз}} + \ldots + \underbrace{x_k + x_k + \ldots + x_k}_{m_k \text{ раз}} =$$

$$= x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k.$$

Тогда среднее значение случайной величины составит:

$$\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \cdot \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \cdot \frac{m_k}{n}.$$

Воспользовавшись равенствами (7.2), окончательно получаем среднее значение случайной величины ξ. Оно называется *математическим ожиданием* случайной величины ξ и обозначается $M(\xi)$. Таким образом,

$$M(\xi) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k. \tag{7.3}$$

Поскольку при проведении испытаний случайная величина ξ непременно принимает одно из значений $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1.$$

Если случайная величина ξ может принимать только одно значение a с вероятностью 1, то по формуле (7.3)

$$M(a) = a \cdot 1 = a, \tag{7.4}$$

что иначе можно сформулировать так: *математическое ожидание постоянной величины равняется этой величине.*

Пусть случайная величина $\xi = x + y$, где x и y тоже случайные величины. Случайная величина x принимает значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а случайная величина y — значения $b_1, b_2, \ldots, b_m$ соответственно с вероятностями $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Тогда по формуле (7.3)

$$\begin{aligned} M(x) &= a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n, \\ M(y) &= b_1q_1 + b_2q_2 + \ldots + b_mq_m. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Случайная величина $\xi = x + y$ может принимать значения $a_1 + b_1$, $a_1 + b_2$, $\ldots$, $a_1 + b_m$, $a_2 + b_1$, $a_2 + b_2$, $\ldots$, $a_2 + b_m$, $\ldots$ $\ldots$ $a_n + b_1$, $a_n + b_2$, $\ldots$, $a_n + b_m$ соответственно с вероятностями

$$p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1m}; p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2m}; \ldots; p_{n1}, p_{n2}, \ldots, p_{nm},$$

где p_{ij} — вероятность того, что x примет значение a_i, а y — значение b_j.

По формуле (7.3)

$$\begin{aligned} M(x+y) = {} & (a_1+b_1)p_{11} + (a_1+b_2)p_{12} + \ldots + (a_1+b_m)p_{1m} + \\ & + (a_2+b_1)p_{21} + (a_2+b_2)p_{22} + \ldots + (a_2+b_m)p_{2m} + \ldots + \\ & + (a_n+b_1)p_{n1} + (a_n+b_2)p_{n2} + \ldots + (a_n+b_m)p_{nm} = \\ & = (a_1(p_{11}+p_{12}+\ldots+p_{1m}) + a_2(p_{21}+p_{22}+\ldots+p_{2m}) + \\ & + \ldots + a_n(p_{n1}+p_{n2}+\ldots+p_{nm})) + (b_1(p_{11}+p_{21}+\ldots+p_{n1}) + \\ & + b_2(p_{12}+p_{22}+\ldots+p_{n2}) + \ldots + b_m(p_{1m}+p_{2m}+\ldots+p_{nm})). \end{aligned}$$

По формуле полной вероятности (5.7)

$$\begin{array}{ll} p_{11} + p_{12} + \ldots + p_{1m} = p_1, & p_{11} + p_{21} + p_{31} + \ldots + p_{n1} = q_1, \\ p_{21} + p_{22} + \ldots + p_{2m} = p_2, & p_{12} + p_{22} + p_{32} + \ldots + p_{n2} = q_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n1} + p_{n2} + \ldots + p_{nm} = p_n, & p_{1m} + p_{2m} + p_{3m} + \ldots + p_{nm} = q_m. \end{array}$$

Тогда $M(x + y) = (a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n) + (b_1q_1 + b_2q_2 + \ldots + b_mq_m)$, или в силу равенства (7.5)

$$M(x + y) = M(x) + M(y). \tag{7.6}$$

Получили правило.

Математическое ожидание суммы случайных величин равняется сумме математических ожиданий этих величин.

Условимся называть случайные величины x и y взаимно независимыми, если они являются численными характеристиками независимых случайных событий. Если величины x и y взаимно независимы, то $p_{ij} = p_iq_j$, где p_{ij} — вероятность совместного появления событий $x = x_i$ и $y = y_j$, p_i — вероятность события $x = x_i$, q_j — вероятность появления события $y = y_j$.

Пусть случайная величина η[1] представляет произведение двух независимых случайных величин x и y. Величина $\eta = xy$ примет значения

[1] η — греческая буква «эта».

$a_1b_1,\ a_1b_2,\ \ldots,\ a_1b_m,\ a_2b_1,\ a_2b_2,\ \ldots,\ a_2b_m,\ \ldots,\ a_nb_1,\ a_nb_2,\ \ldots,\ a_nb_m,$
вследствие независимости x и y соответственно с вероятностями

$p_1q_1,\ p_1q_2,\ \ldots,\ p_1q_m,\ p_2q_1,\ p_2q_2,\ \ldots,\ p_2q_m,\ \ldots,\ p_nq_1,\ p_nq_2,\ \ldots,\ p_nq_m.$

Поэтому по формуле (7.3)

$$\begin{aligned}
M(xy) &= a_1b_1p_1q_1 + a_1b_2p_1q_2 + \ldots + a_1b_mp_1q_m + a_2b_1p_2q_1 + \\
&+ a_2b_2p_2q_2 + \ldots + a_2b_mp_2q_m + \ldots + a_nb_1\,p_nq_1 + \\
&+ a_nb_2p_nq_2 + \ldots + a_nb_mp_nq_m = a_1p_1(b_1q_1 + b_2q_2 + \ldots + b_mq_m) + \\
&+ a_2p_2(b_1q_1 + b_2q_2 + \ldots + b_mq_m) + \ldots + a_np_n(b_1q_1 + b_2q_2 + \\
&+ \ldots + b_mq_m) = (a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n)(b_1q_1 + b_2q_2 + \ldots + \\
&+ b_mq_m).
\end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (7.3), получаем

$$M(xy) = M(x) \cdot M(y), \tag{7.7}$$

иначе говоря:

математическое ожидание произведения независимых случайных величин равняется произведению математических ожиданий этих величин.

В силу формул (7.4) и (7.7)

$$M(c\xi) = cM(\xi), \tag{7.8}$$

что означает:

постоянный множитель случайной величины можно вынести перед знаком математического ожидания.

Примеры

1. Мишень (рис. 15) установлена так, что может вращаться вокруг оси (O). При достаточно большой угловой скорости вращения стрелок не в состоянии различать цифры, выписанные по одной на секторах. Он вынужден стрелять наугад. При попадании в сектор 1 стрелок выигрывает 1 рубль, в сектор 2 — 2 рубля, в сектор 3 — 3 рубля и т. д., в сектор 8 — 8 рублей. Стоит ли ему участвовать в такой игре, если за право стрелять один раз надо платить 5 рублей?

Поскольку мишень вращается, то способности стрелка здесь не имеют никакого значения: попадание — чистая случайность. Случайная величина ξ выражает возможные выигрыши. Она может принимать значения

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

Так как все сектора одинаковые, то каждое из этих значений — случайная величина — принимает с одинаковой вероятностью $\frac{1}{8}$.

Рис. 15

Значит, по формуле (7.3)

$$M(\xi) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{8} + 7 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{8} = 4{,}5 \text{ (руб.)}.$$

Итак, математическое ожидание выигрыша 4,5 рубля, а стоимость выстрела 5 руб. Стрелять много раз явно не выгодно. На основании подобных расчетов в капиталистических странах организуются разнообразные азартные игры, приводящие игроков к разорению.

2. Найти математическое ожидание случайной величины, распределенной по биномиальному закону распределения.

Непосредственное применение формулы (7.3) приводит к большим сложностям. Поэтому задачу мы будем решать иначе.

Случайная величина ξ, распределенная по биномиальному закону, определяется числом появлений события A при n испытаниях. Вероятность появления такого события — p, непоявления — $q = 1 - p$.

Пусть ξ_i — число появлений события A при i испытании. Ясно, что ξ_i может принять только 2 значения: 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью q. Тогда

$$M(\xi_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

Но $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = \xi$.

По формуле (7.6)

$$M(\xi) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \ldots + M(\xi_n) = np.$$

Упражнения

153. Закон распределения случайной величины ξ представлен таблицей:

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Найти математическое ожидание случайной величины ξ.

154. У охотника 4 патрона. Он стреляет по зайцу, пока не попадет или пока не кончатся патроны. Найдите математическое ожидание количества выстрелов, если вероятность попадания 0,25.

155. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует регулировки — 0,9, второй — 0,8, третий — 0,75, четвертый — 0,7. Найдите математическое ожидание числа станков, которые в течение часа не потребуют регулировки.

156. Монету подбрасываем 7 раз. Сколько раз в среднем может появиться герб?

157. Игральная кость бросается 12 раз. Сколько раз в среднем может появиться шестерка?

158. У дежурного гостиницы в кармане 8 разных ключей от разных комнат. Вынув наугад ключ, он попробует открыть дверь ближайшей комнаты. Сколько раз в среднем ему придется пробовать открывать эту комнату, если:

1) проверенный ключ кладется обратно в карман;

2) проверенный ключ не кладется обратно в карман.

159. Стрельба по мишени ведется до второго попадания. Найдите математическое ожидание числа выстрелов, если вероятность попадания одним выстрелом 0,2.

160. Автомобиль встретит 4 светофора, каждый из которых пропустит его с вероятностью 0,5. Найдите математическое ожидание числа светофоров до первой остановки машины.

161. Стрельба по мишени ведется до k-го попадания. Запасы патронов не ограничены. Вероятность попадания p. Вычислить, сколько в среднем патронов будет израсходовано.

162. Закон распределения случайной величины x такой:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

а величины y такой:

y	1	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Найти математическое ожидание случайных величин $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, λ[1] $= xy$, где x и y — независимые случайные величины.

163. Мишень (рис. 16) установлена так, что может вращаться вокруг оси (0). При достаточно большой угловой скорости вращения стрелок не может различить сектора мишени. Он вынужден стрелять

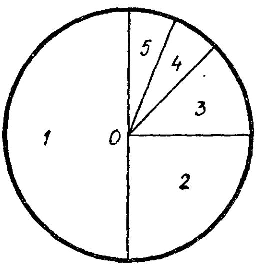

Рис. 16

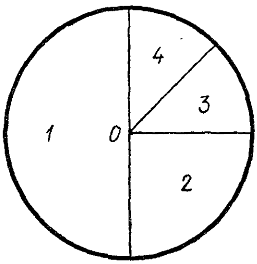

Рис. 17

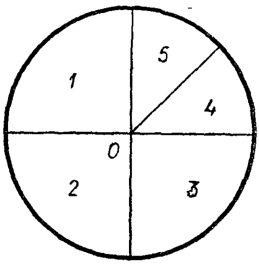

Рис. 18

[1] λ — греческая буква «ламбда».

наугад. При попадании в первый сектор стрелок выигрывает 1 руб., во второй — проигрывает 2 руб., в третий — выигрывает 3 руб., в четвертый — проигрывает 4 руб., а в пятый — выигрывает 5 руб. Стоит ли участвовать в такой игре? Почему?

164. Мишени (рис. 17 и рис. 18) установлены так, что могут вращаться вокруг оси (0). Стрелок вновь вынужден стрелять наугад. При попадании в первый сектор первой мишени стрелок выигрывает 1 руб., во второй сектор — проигрывает 2 руб., в третий — выигрывает 3 руб., в четвертый — проигрывает 4 руб. При попадании в первый сектор второй мишени стрелок проигрывает 1 руб., во второй — проигрывает 2 руб., а в третий — проигрывает 3 руб., в четвертый — выигрывает 4 руб., в пятый — не выигрывает и не проигрывает. Стоит ли участвовать в такой игре? Почему?

165. Закон распределения случайной величины x такой:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0

величины y —

y	0	1	2	8	10	11	12	13	14	20	30	40
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0

величины z —

z	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
P	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$

Найти математическое ожидание случайных величин $\xi = x + y - z$, $\eta = x - y + z$, $\lambda = xy$, где x и y — независимые случайные величины.

166. Баскетболист забрасывает мяч в корзину со штрафного с вероятностью 0,5. Сколько в среднем штрафных он может забросить подряд?

2. ДИСПЕРСИЯ

Вычислим математическое ожидание следующей случайной величины ξ:

ξ	-10	-6	-2	1	3	5	8	10
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

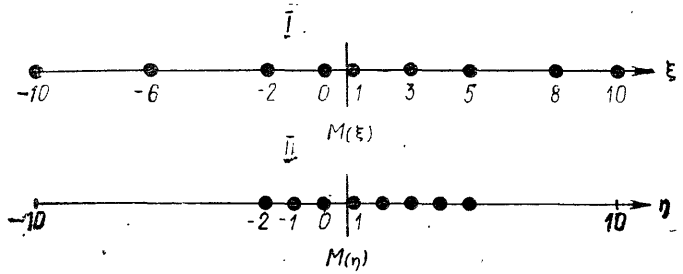

Рис. 19

Здесь $M(\xi) = \frac{7}{8}$.

А теперь математическое ожидание $M(\eta)$ случайной величины η

η	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Получаем снова такое же значение $M(\eta) = \frac{7}{8}$.

Любопытный результат: распределения случайных величин ξ и η разные, а математические ожидания одинаковые. Чем отличаются распределения этих величин, если их математические ожидания равны? Ответ получаем, рассмотрев рисунок 19, где виден разный характер сосредоточения значений случайных величин около математических ожиданий. При втором распределении значения случайной величины η компактнее сосредоточены около $M(\eta)$, чем при первом около $M(\xi)$. Как измерить степень этой сосредоточенности? Можно было измерить средним отклонением случайной величины ξ от ее математического ожидания $M(\xi)$, но такая мера неудобна, так как она может принимать как положительные, так и отрицательные значения, которые при суммировании сократятся. Для измерения сосредоточенности значений случайной величины обычно применяют математическое ожидание случайной величины $(\xi - M(\xi))^2$. Такое математическое ожидание называется *дисперсией случайной величины* ξ и обозначается $D(\xi)$[1]. Таким образом,

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2. \tag{7.9}$$

$\sigma = \sqrt{D(\xi)}$ называется *средним* (рис. 19) *квадратическим отклонением*.

Найдем другое выражение формулы (7.9):

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 = M(\xi^2 - 2\xi M(\xi) + M^2(\xi)).$$

[1] Известны и другие обозначения: $\sigma^2 = M(\xi - M(\xi))^2$, где σ — греческая буква «сигма».

Воспользовавшись формулами (7.6), (7.7) и (7.8) и тем, что $M(\xi)$ — величина постоянная, находим:

$$\begin{aligned} D(\xi) &= M(\xi^2) - 2M(\xi M(\xi)) + M^2(\xi) = \\ &= M(\xi^2) - 2M(\xi)\cdot M(\xi) + M^2(\xi) = \\ &= M(\xi^2) - 2M^2(\xi) + M^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi). \end{aligned}$$

Итак,

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi). \qquad (7.10)$$

По этой формуле удобнее всего вычислять значения дисперсии.

Если $D(\xi)$ — сравнительно малое число, то в этом случае значения случайной величины ξ близки к ее математическому ожиданию $M(\xi)$. Если же $D(\xi)$ — большое число, то значения ξ сильно рассредоточены около $M(\xi)$.

По формуле (7.10) получаем:

$$D(c) = M(c^2) - M^2(c) = c^2 - c^2 = 0, \qquad (7.11)$$

откуда следует, что *дисперсия постоянной величины равняется нулю.*

Применяя формулу (7.10), нетрудно также найти дисперсию случайной величины $c\xi$, где c — постоянный сомножитель. Действительно,

$$\begin{aligned} D(c\xi) &= M(c^2\xi^2) - M^2(c\xi) = c^2M(\xi^2) - c^2M^2(\xi) = \\ &= c^2(M(\xi^2) - M^2(\xi)) = c^2D(\xi), \text{ т.е. } D(c\xi) = c^2 D(\xi). \end{aligned}$$

Если ξ и η — независимые случайные величины, то по формуле (7.7) $M(\xi\eta) = M(\xi)\cdot M(\eta)$.

$$\begin{aligned} D(\xi+\eta) &= M(\xi+\eta)^2 - M^2(\xi+\eta) = M(\xi^2 + 2\xi\eta + \\ &+ \eta^2) - (M(\xi) + M(\eta))^2 = M(\xi^2) + 2M(\xi)\cdot M(\eta) + \\ &+ M(\eta^2) - M^2(\xi) - 2M(\xi)\cdot M(\eta) - M^2(\eta) = (M(\xi^2) - \\ &- M^2(\xi)) + (M(\eta^2) - M^2(\eta)), \end{aligned}$$

или

$$D(\xi+\eta) = D(\xi) + D(\eta), \qquad (7.12)$$

что означает:

дисперсия суммы независимых случайных величин равняется сумме их дисперсий.

Заметим также, что

$$D(\xi - \eta) = D(\xi) + D(\eta), \qquad (7,\ 13)$$

ибо $D(-\eta) = (-1)^2 D(\eta) = D(\eta)$.

Примеры

1. Случайная величина ξ распределена по закону

ξ	2	4	6	8	10
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Найти $D(\xi)$.

Сначала находим $M(\xi)$. Согласно формуле (7. 3)

$$M(\xi) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + 10 \cdot \frac{1}{4} = 6.$$

Теперь можно выразить закон распределения случайной величины $(\xi - M(\xi))^2$.

$(\xi - M(\xi))^2$	16	4	0	4	16
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Наконец, используя формулу (7.9),

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 = 16 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 16 \cdot \frac{1}{4} = 9.$$

Эту же задачу можно решать другим путем.

Используя формулу $D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$, представим распределение случайной величины ξ^2 с помощью следующей таблицы:

ξ^2	4	16	36	64	100
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

По формуле (7. 3)

$$M(\xi^2) = 4 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{1}{8} + 36 \cdot \frac{1}{4} + 64 \cdot \frac{1}{8} + 100 \cdot \frac{1}{4} = 45.$$

Тогда $D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 45 - 6^2 = 45 - 36 = 9$.

Сравните, какой способ требует меньше вычислительной работы.

2. Случайная величина ξ распределена так:

ξ	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0,01	0,1	0,2	0,3	0,08	0,2	0,1	0,01

Случайная величина η распределена так:

η	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0,3	0,2	0,1	0,1	0,2	0,01	0,08	0,01

Найти дисперсию случайной величины $x = \xi + \eta$, где ξ, η — независимые случайные величины.

Согласно формуле (7.12) $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$.

Так как

$$M(\xi) = 1 \cdot 0{,}01 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \times \times 0{,}08 + 6 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}01 = 4{,}39,$$

то распределение случайной величины $(\xi - M(\xi))^2$ имеет вид:

$(\xi-M(\xi))^2$	11,4921	5,7121	1,9321	0,1521	0,3721	2,5921	6,8121	12,0321
P	0,01	0,1	0,2	0,3	0,08	0,2	0,1	0,01

Поэтому

$$D(\xi) = 11{,}4921 \cdot 0{,}01 + 5{,}7121 \cdot 0{,}1 + 1{,}9321 \cdot 0{,}2 + 0{,}1521 \times \times 0{,}3 + 0{,}3721 \cdot 0{,}08 + 2{,}5921 \cdot 0{,}2 + 6{,}8121 \cdot 0{,}1 + 13{,}0321 \times \times 0{,}01 = 2{,}47789.$$

Поскольку

$$M(\eta) = 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2 + 6 \times \times 0{,}01 + 7 \cdot 0{,}08 + 8 \cdot 0{,}01 = 3{,}1,$$

то распределение случайной величины $(\eta - M(\eta))^2$ запишется:

$(\eta-M(\eta))^2$	4,41	1,21	0,01	0,81	3,61	8,41	15,21	24,01
P	0,3	0,2	0,1	0,1	0,2	0,01	0,08	0,01

Находим

$$D(\eta) = 4{,}41 \cdot 0{,}3 + 1{,}21 \cdot 0{,}2 + 0{,}01 \cdot 0{,}1 + 0{,}81 \cdot 0{,}1 + 3{,}61 \times \times 0{,}2 + 8{,}41 \cdot 0{,}01 + 15{,}21 \cdot 0{,}08 + 24{,}01 \cdot 0{,}1 = 3{,}91.$$

Значит, $D(x) = 2{,}47789 + 3{,}91 = 6{,}38789$.

3. Найти дисперсию случайной величины, распределенной по биномиальному закону.

Случайная величина ξ, распределенная по биномиальному закону, представляет нам число событий A при n независимых испытаниях, когда вероятность появления события A есть p, а непоявления — $q = 1 - p$.

Пусть ξ_i — число событий A при i-ом испытании. ξ_i может принять два значения: 1 с вероятностью p (A произошло) и 0 с вероятностью q (A не произошло). Тогда $M(\xi_i^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p$. По формуле (7.10) находим:

$$D(\xi_i) = M(\xi_i^2) - M^2(\xi_i) = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Поскольку $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ и ξ_i — независимые случайные величины, то $D(\xi) = D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + \ldots + D(\xi_n) = npq$.

3. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА И ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Пусть математическое ожидание случайной величины ξ равно a. Распределение ξ выразится с помощью таблицы:

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-1}	p_n

Дисперсия случайной величины ξ определяется из формулы:

$$D(\xi) = (x_1 - a)^2 p_1 + (x_2 - a)^2 p_2 + \ldots + (x_n - a)^2 p_n. \qquad (7.14)$$

Вычислим теперь вероятность события $|\xi - a| \geqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — наперед заданное число. Пусть x_{k_1}, $x_{k_2}, \ldots, x_{k_m}$ — те значения ξ, для которых имеет место $|x_{k_i} - a| \geqslant \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда ясно, что

$$D(\xi) \geqslant (x_{k_1} - a)^2 p_{k_1} + (x_{k_2} - a)^2 p_{k_2} + \ldots + (x_{k_m} - a)^2 p_{k_m},$$

ибо это неравенство получается путем отбрасывания из правой части неравенства (7.14) тех слагаемых, для которых $|\xi - a| < \varepsilon$.

Тем более

$$D(\xi) \geqslant \varepsilon^2 p_{k_1} + \varepsilon^2 p_{k_2} + \ldots + \varepsilon^2 p_{k_m} = \varepsilon^2 (p_{k_1} + p_{k_2} + \ldots + p_{k_m}).$$

Но

$$p_{k_1} + p_{k_2} + \ldots + p_{k_m} = P(|\xi - a| \geqslant \xi),$$

поэтому

$$D(\xi) \geqslant \varepsilon^2 P(|\xi - a| \geqslant \varepsilon),$$

$$P(|\xi - a| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}. \qquad (7.15)$$

Это знаменитое *неравенство Чебышева*. Оно позволяет оценить вероятность отклонения случайной величины ξ от ее математического ожидания. С помощью неравенства Чебышева выведем закон больших чисел, который впервые был сформулирован Я. Бернулли.

Допустим, что $\xi = \frac{S_n}{n}$, где S_n — число появления события A при n независимых испытаниях. Обозначим $P(A) = p$. Нами доказано, что $M(S_n) = np$ и $D(S_n) = npq$. Используя эти результаты, находим:

$$M\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot M(S_n) = \frac{1}{n} np = p.$$

$$D\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot D(S_n) = \frac{1}{n^2} npq = \frac{pq}{n}.$$

Теперь в силу неравенства (7.15)

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

При $n \to \infty$, $\frac{pq}{n\varepsilon^2} \to 0$, поэтому при любом $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0.$$

Этому равносильно:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\to 1, \qquad (7.16)$$

где $\frac{S_n}{n}$ — частота появления события A при n независимых испытаниях, p — вероятность события A в отдельном испытании.

(7.16) — не что иное, как запись закона больших чисел:

С вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе независимых испытаний частота появления наблюдаемого события как угодно мало отличается от его вероятности при отдельном испытании.

Упражнения

167. Распределение случайной величины ξ имеет вид:

ξ	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0,15	0,2	0,15	0,1	0,15	0,05	0,15	0,05

а распределение величины η:

η	9	8	7	6	5	4	3	2
P	0,15	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1

Найдите дисперсию случайной величины ξ и дисперсию случайной величины η.

168. Три случайные величины распределены так:

1)

ξ	—1	—2	—3	—10	—12	—20	—30	—40
P	0,1	0,1	0,1	0,09	0,3	0,009	0,3	0,001

2)

η	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0,001	0,2	0,001	0,3	0,008	0	0,09	0,4

3)

λ	20	10	5	2	1	—2	—5	—10
P	0,001	0,2	0,009	0,29	0,001	0,009	0,2	0,29

Найдите $M(\xi^2)$, $M(2\eta)$, $M\left(\frac{\lambda}{2}\right)$.

169. Найдите дисперсию суммы независимых случайных величин, распределения которых даны в задаче 167.

170. Независимые случайные величины ξ, η и λ распределены так, как указывается в задаче 168. Найдите дисперсию случайной величины

$$x = \xi + \eta - \lambda.$$

171. Производятся испытания, каждое из которых может завершиться одним из 20 равновозможных исходов. Результаты испытаний таковы:

Испытание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Результат	4,4	6,1	5,1	4,9	5,9	4,1	5,6	6,8	4,3	5,0	7,7	4,0	4,2	5,8	2,0	6,5	3,2	4,8	5,2	2,6

Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

172. Ведется стрельба по мишени. Вероятность попадания $\frac{1}{3}$. Найдите дисперсию числа попаданий.

173. Производятся 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания 0,4. Случайная величина ξ — число попаданий. Найдите $M(\xi)$ и $D(\xi)$.

174. Баскетболист бросает мяч в корзину до первого попадания. Вероятность попадания равна 0,6. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа бросаний.

175. Найдите дисперсию случайной величины X, представляющей собой число появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M(X) = 1{,}2$.

176. Из всей выпускаемой заводом продукции 95% составляют стандартные изделия. Наугад отобраны 6 деталей. Пусть ξ — число стандартных деталей среди шести отобранных. Найдите $D(\xi)$.

177. Человек находится в начале системы координат. Он подбрасывает монету. При появлении герба делает шаг направо, при появлении цифры — шаг налево. Пусть ξ — абсцисса положения человека после n бросаний. Какой вид имеет распределение случайной величины ξ? Найдите $M(\xi)$ и $D(\xi)$.

178. Пронумерованы n одинаковых карточек. Потом эти карточки наугад поменяли местами. Пусть S_n — число карточек, которые и после перестановки остались на своих местах (например, карточка с номером 7 осталась на седьмом месте от начала). Найдите $M(S_n)$ и $D(S_n)$.

179. Закон распределения случайной величины ξ такой:

ξ	−1	0	1	2
P	0,2	0,1	0,3	0,4

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 2^{\xi}$.

180. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: X_1 и X_2, причем $X_2 > X_1$. Вероятность того, что X примет значение X_1, равна 0,6. Построить закон распределения величины X, если $\boldsymbol{M}(X) = 1{,}4$ и $\boldsymbol{D}(X) = 0{,}24$.

181. Математическое ожидание случайной величины $\boldsymbol{M}(\xi) = a$, а дисперсия $\boldsymbol{D}(\xi) = b$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $x = -\xi$, $z = \xi + 2x - 1$, $u = 3\xi - x + 2z - 3$.

182. Дискретная случайная величина X принимает только три возможных значения: $X_1 = 1$, X_2 и X_3, причем $X_1 < X_2 < X_3$. Вероятности того, что X примет значения X_1 и X_2, соответственно равны 0,3 и 0,2. Постройте закон распределения величины X, зная, что $\boldsymbol{M}(X) = 2{,}2$ и $\boldsymbol{D}(X) = 0{,}76$.

183. Пусть событие A — появление двух гербов при бросании трех монет. Производится n-кратное бросание 3 монет. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин ξ и η, где ξ — число появления события A при n испытаниях, $\eta = \frac{\xi}{n}$ — частота события A.

184. В ящике 2 белых и 3 черных шарика. ξ— число белых шариков среди двух, вынутых наугад. Найдите $\boldsymbol{M}(\xi)$ и $\boldsymbol{D}(\xi)$.

185. В ящике a белых и b черных шариков. Наугад вынимают k шариков ($k \leqslant a + b$). Найдите математическое ожидание и дисперсию числа вынутых белых шариков.

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

В разделе VI-3 формула Пуассона (6.6) служила удобным приближением для биномиального распределения в случае большого n и малого p. Существуют также и другие распределения вероятностей, которые приводят в пределе к формуле Пуассона (6.6). Мы сталкиваемся здесь с проявлением того факта, что существует несколько распределений большой общности, встречающихся в разнообразных задачах. Тремя чаще всего встречающимися распределениями являются биномиальное (оно нами рассмотрено в главе VI), нормальное и распределение Пуассона, которое мы теперь рассмотрим более основательно.

Будем говорить, что случайная величина ξ распределена по закону Пуассона, если она принимает значения m ($m = 0, 1, 2, 3, \ldots$) с вероятностями

$$\boldsymbol{P}(\xi = m) = \frac{k^m}{m!} e^{-k}. \qquad (7.17)$$

Математическое ожидание такой величины может быть представлено бесконечным рядом:

$$M(\xi) = 1 \cdot \frac{K}{1!}e^{-k} + 2 \cdot \frac{k^2}{2!}e^{-k} + 3 \cdot \frac{k^3}{3!}e^{-k} + \ldots + m \cdot \frac{k^m}{m!}e^{-k} + \ldots =$$

$$= ke^{-k}\left(1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \ldots + \frac{k^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots\right).$$

Но

$$1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \ldots + \frac{k^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{k^m}{m!} + \ldots = e^k. \tag{7.18}$$

Поэтому $M(\xi) = k$ и $D(\xi) = k$.

Значит, в формуле (7.17) k представляет среднее значение случайной величины ξ, распределенной по закону Пуассона.

Рассмотрим такие последовательности случайных событий, примерами которых могут служить вызовы, поступающие на телефонную станцию, заходы судов в порт, испускание α-частиц радиоактивным веществом и т. д. Каждое событие можно изобразить точкой на оси времени, тогда получаем случайное распределение точек. Покажем, что на величину

$$\frac{k^m}{m!}e^{-k}$$

можно смотреть как на вероятность иметь m точек (m событий) внутри интервала определенной длины.

Пусть условия опыта остаются неизменными во времени и неперекрывающиеся интервалы времени независимы в том смысле, что число событий на одном интервале не зависит от числа событий на других интервалах.

Представим единичный интервал времени, разделенный на n интервалов (n — большое число), длина каждого из которых $\frac{1}{n}$. Пусть любой из интервалов либо пуст, либо содержит по крайней мере одну случайную точку, т. е. интервал не пуст. Пусть событие A — «интервал не пуст». Поскольку длина всех интервалов одинакова, то для любого из интервалов вероятность события A должна быть одной и той же. Обозначим $P(A) = p_n$. Пусть $np_n \to k$ при неограниченном возрастании n. Тогда по формуле (6.6) вероятность того, что среди n неперекрывающихся интервалов m непустых:

$$P(S_n = m) \approx \frac{k^m}{m!}e^{-k}.$$

Здесь, конечно, m не означает числа случайных точек на единичном интервале, ибо в любом из непустых интервалов мы можем иметь несколько случайных точек. Однако естественно ввести дополнительное допущение, что вероятностью появления двух или более событий в течение очень короткого промежутка времени можно в пределе пренебречь. Таким образом, вероятность иметь в единичном интервале времени m случайных точек получается как предел $P(S_n = m)$ при $n \to \infty$. Если эту вероятность обозначим $p(m, k)$, то

$$p(m;\ k) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(S_n = m) = \frac{k^m}{m!}e^{-k}. \tag{7.19}$$

Если вместо единичного интервала мы возьмем произвольный интервал длины t и снова воспользуемся разбиением на интервалы длины $\frac{1}{n}$, то мы получим испытания Бернулли с той же самой вероятностью p_n, но количество испытаний будет равно уже не n, а ближайшему к nt целому числу. Переход к пределу такой же, только вместо k мы получим kt. Это приводит к истолкованию величины

$$p(m;\ kt) = \frac{(kt)^m}{m!}e^{-kt} \tag{7.20}$$

как вероятности иметь m случайных точек на фиксированном интервале длины t. В частности, вероятность того, что на интервале длины t не будет ни одной точки, равна

$$p(0;\quad kt) = e^{-kt}. \tag{7.21}$$

Параметр k определяет плотность точек на оси t. Из формулы (7.21) видно, что, чем больше k, тем меньше вероятность события, состоящего в том, что интервал $(0,\ t)$ пуст. Формула (7.20) может быть применена при решении разных задач.

Примеры

1. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час 540 вызовов. Какова вероятность того, что в данную минуту она получит ровно 20 вызовов?

Так как вызовы независимы друг от друга, число вызовов за промежуток времени $\Delta t = 1$ мин распределяется по закону Пуассона. Произведение kt мы можем рассматривать как среднее число точек, приходящееся на интервал времени длины t. Таким образом, по условию задачи

$$kt = \frac{540}{60} = 9.$$

По формуле (7.20), зная, что $m = 20$, находим

$$p(20;\ 9) = \frac{9^{20}}{20!}e^{-9}.$$

По таблице 3

$$p\ (20;9) = 0{,}000617.$$

2. В аэропорту производят посадку в среднем 3 самолета в минуту. Какова вероятность того, что в течение 2 мин произведут посадку не меньше 4 самолетов?

Пусть событие A — «произвели посадку не меньше 4 самолетов». Противоположное ему событие $\bar{A}$ — «произвели посадку меньше 4 самолетов». Обозначим события:

A_0 — «не было ни одной посадки»,
A_1 — «состоялась одна посадка»,
A_2 — «состоялись две посадки»,
A_3 — «состоялись три посадки».

Понятно, что

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3.$$

Поскольку события A_0, A_1, A_2, A_3 несовместимы, то

$$\boldsymbol{P}(\overline{A}) = \boldsymbol{P}(A_0) + \boldsymbol{P}(A_1) + \boldsymbol{P}(A_2) + \boldsymbol{P}(A_3).$$

Соответственно условию задачи $t = 2$, $k = 3$, $m = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$ Поэтому по формуле (7.20) и таблице 3

$$\boldsymbol{P}(A_0) = p(0;\ 3 \cdot 2) = p(0;\ 6) = 0{,}002479,$$
$$\boldsymbol{P}(A_1) = p(1;\ 3 \cdot 2) = p(1;\ 6) = 0{,}014873,$$
$$\boldsymbol{P}(A_2) = p(2;\ 3 \cdot 2) = p(2;\ 6) = 0{,}044618,$$
$$\boldsymbol{P}(A_3) = p(3;\ 3 \cdot 2) = p(3;\ 6) = 0{,}089235.$$

Получаем: $\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 0{,}151205$. Поскольку $\boldsymbol{P}(A) = 1 - \boldsymbol{P}(\overline{A})$, то

$$\boldsymbol{P}(A) = 0{,}848795.$$

3. На прядильной фабрике работница обслуживает по нескольку сотен внешне практически ничем не отличимых веретен. При вращении веретена пряжа из-за неравномерности натяжения и других причин рвется в случайные моменты времени. Для производства важно знать, как часто могут происходить обрывы пряжи в зависимости от тех или иных условий (сорт пряжи, скорость вращения веретен и т. д.).

Пусть работница обслуживает 800 веретен и вероятность обрыва пряжи в течение одной минуты 0,0005. Найти вероятность того, что в течение 10 мин произойдет не более 2 обрывов.

Пусть событие A — «произойдет не более 2 обрывов». Обозначим события:

A_0 — «обрывов не произошло»,
A_1 — «произошел один обрыв»,
A_2 — «произошли два обрыва».

Ясно, что $A = A_0 + A_1 + A_2$. Согласно условию задачи $t = 10$, $k = 800 \cdot 0{,}0005 = 0{,}4$, $m = 0,\ 1,\ 2.$
По формуле (7.20) и таблице 3:

$$\boldsymbol{P}(A_0) = p(0;\ 0{,}4 \cdot 10) = p(0;\ 4) = 0{,}018316,$$
$$\boldsymbol{P}(A_1) = p(1;\ 0{,}4 \cdot 10) = p(1;\ 4) = 0{,}073263,$$
$$\boldsymbol{P}(A_2) = p(2;\ 0{,}4 \cdot 10) = p(2;\ 4) = 0{,}146525.$$

Поскольку $\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(A_0) + \boldsymbol{P}(A_1) + \boldsymbol{P}(A_2)$, то

$$\boldsymbol{P}(A) = 0{,}238104.$$

VIII. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый интервал, называются непрерывными случайными величинами.

Пусть ξ — непрерывная случайная величина, возможные значения которой представляют точки интервала $[1;\ 3[$. Какова вероятность того, что $\xi = 2$?

Для решения этой задачи попробуем применить формулу (4.1). Поскольку на интервале бесконечно много точек, то $n = \infty$. Число 2 представляет только одна-единственная точка, поэтому $m = 1$. Тогда

$$P(\xi = 2) = \frac{1}{\infty} = 0. \tag{8.1}$$

И вообще, *вероятность появления любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю.*

Но разве $\xi = 2$ — невозможное событие?! Оно все же может состояться! Читателю следует запомнить следующее правило: *вероятность невозможного события равна нулю, но если вероятность некоторого события равна нулю, то это не значит, что событие невозможное: нулевую вероятность могут иметь и возможные события.*

Результат (8.1) приводит к мысли, что для непрерывных случайных величин нельзя построить закон распределения в такой форме, какая была удобна для дискретных случайных величин. Так и есть. К закону распределения непрерывной случайной величины будем подходить иначе.

Вероятность того, что $\xi < x$, будем называть функцией распределения непрерывной случайной величины ξ и обозначать

$$P(\xi < x) = F(x).$$

Очевидны следующие свойства $F(x)$:

1) $F(x)$ — неубывающая функция.

Действительно. Пусть $x_1 < x_2$ (рис. 20).

Событие «$\xi < x_2$» представляет собой сумму событий «$\xi < x_1$» и «$x_1 \leqslant \xi < x_2$». Поэтому, в силу несовместимости их,

$$P(\xi < x_2) = P(\xi < x_1) + P(x_1 \leqslant \xi < x_2).$$

Поскольку $P(x_1 \leqslant \xi < x_2) \geqslant 0$, то

$$P(\xi < x_1) \leqslant P(\xi < x_2), \text{ т. е.}$$
$$F(x_1) \leqslant F(x_2).$$

2) $F(x)$ — непрерывная слева.

Выберем какую-нибудь возрастающую последовательность $x_1 < x_2 < x_3 \ldots. < x_n < \ldots$, сходящуюся к x. Пусть A_n событие «$x_n \leqslant \xi < x$». Тогда в силу свойства 1

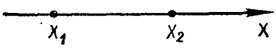

Рис. 20

$$P(A_n) = P(\xi < x) - P(\xi < x_n) = F(x) - F(x_n).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(F(x) - F(x_n)) = F(x) - \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = F(x) - F(x-0) = 0$, что и требовалось доказать.

3) $F(\infty) = 1$.

Событие «$\xi < \infty$» достоверное, поэтому

$$\boldsymbol{P}(\xi < \infty) = F(\infty) = 1.$$

4) $F(-\infty) = 0$.

Событие «$\xi < -\infty$» невозможное, поэтому

$$\boldsymbol{P}(\xi < -\infty) = F(-\infty) = 0.$$

Примечание: когда известно, что случайная величина может принимать только значения интервала $[a; b[$, то достоверным событием является событие «$\xi < b$», а невозможным «$\xi < a$». В таком случае

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(\xi < b) &= F(b) = 1, \\ \boldsymbol{P}(\xi < a) &= F(a) = 0. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Когда известна функция распределения $F(x)$, можно найти вероятность попадания случайной величины на заданный интервал. Именно:

Вероятность попадания случайной величины на заданный интервал равна приращению функции распределения на этом интервале, т. е.

$$\boldsymbol{P}(a \leqslant \xi < b) = F(b) - F(a). \tag{8.3}$$

Доказать это нетрудно. В результате несовместимости событий «$\xi < a$» и «$a \leqslant \xi < b$»

$$\boldsymbol{P}(\xi < b) = \boldsymbol{P}(\xi < a) + \boldsymbol{P}(a \leqslant \xi < b), \text{ т. е.}$$

$$F(b) = F(a) + \boldsymbol{P}(a \leqslant \xi < b), \text{ откуда и следует (8.3).}$$

Примеры

1. Функция распределения случайной величины ξ

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & \text{при } -1 < x \leqslant 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение, заключенное в интервале $[0; 1[$.

По формуле (8.3)

$$\boldsymbol{P}(0 \leqslant \xi < 1) = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)_{x=1} - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)_{x=0} = \frac{1}{3}.$$

2. Функция распределения случайной величины ξ

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<-\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{1}{2}(\sin x+1) & \text{при } -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение в интервале $\left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right[$.

По формуле (8.3)

$$P\left(0\leqslant\xi<\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}+1\right)-\frac{1}{2}(\sin 0+1)=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3. Доказать, что

$$P(a\leqslant\xi<b)=P(a<\xi<b)=P(a<\xi\leqslant b)=P(a\leqslant\xi\leqslant b)\quad(8.4)$$

$P(a\leqslant\xi<b)=P(\xi=a)+P(a<\xi<b)$. Но $P(\xi=a)=0$, поэтому

$$P(a\leqslant\xi<b)=P(a<\xi<b).$$

Также $P(\xi=b)=0$, поэтому

$$P(a<\xi\leqslant b)=P(a<\xi<b)+P(\xi=b)=$$
$$=P(a<\xi<b).$$

Наконец

$$P(a\leqslant\xi\leqslant b)=P(\xi=a)+P(a<\xi<b)+P(\xi=b)=$$
$$=P(a<\xi<b).$$

Равенство вероятностей (8.4) полезно запомнить для изучения следующих разделов книги.

1. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

У читателя, возможно, мог возникнуть такой вопрос: каким путем, наблюдая случайные значения ξ, построить функцию распределения $F(x)$. Оказывается, что к этой функции практически проще подходить через другую функцию.

Пусть $F(x)$ — непрерывная и дифференцируемая функция распределения случайной величины ξ. Вычислим вероятность попадания значений на интервал от x до $x+\Delta x$. По формуле (8.3)

$$P(x\leqslant\xi<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x).$$

Рассмотрим отношение этой вероятности к длине интервала, т. е. среднюю вероятность, приходящуюся на единицу длины, и будем Δx приближать к нулю.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\leqslant\xi<x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x).\quad(8.5)$$

Полученная производная $F'(x)=p(x)$ называется плотностью распределения случайной величины ξ.

Оказывается, что на основании испытаний практическое построение плотности распределения ξ более удобное, чем построение самой функции распределения.

Пусть непрерывная случайная величина ξ принимает значения на интервале $[a;\ b[$. Разделим интервал на n равных частей точками $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$.

Проводим N испытаний и следим за появляющимися значениями ξ. Пусть

m_1 значений ξ оказались принадлежащими интервалу $[a;\ x_1[$;
m_2 —»— ξ —»— —»— —»— $[x_1;\ x_2[$;
m_3 —»— ξ —»— —»— —»— $[x_2;\ x_3[$;
. . . .
m_n —»— ξ —»— —»— —»— $[x_{n-1};\ b[$.

Тогда мы можем делать вывод, что при испытаниях относительная частота появления ξ на интервале $[a;\ x_1[$ равна $\frac{m_1}{N}$;
—»— —»— —»— на —»— $[x_1;\ x_2[$ —«— $\frac{m_2}{N}$;
—»— —»— —»— на —»— $[x_2;\ x_3[$ —«— $\frac{m_3}{N}$;
. . . .
—»— —»— —»— на —»— $[x_{n-1};\ b[$ —«— $\frac{m_n}{N}$.

Построим диаграмму относительных частот (рис. 21). Такая диаграмма называется гистограммой. Она с определенной точностью дает представление о плотности распределения значений ξ на интервале $[a;\ b[$. При увеличении числа делений n и числа испытаний гистограмма все точнее отражала бы плотность распределения, графиком которой вырисовывалась бы кривая плотности.

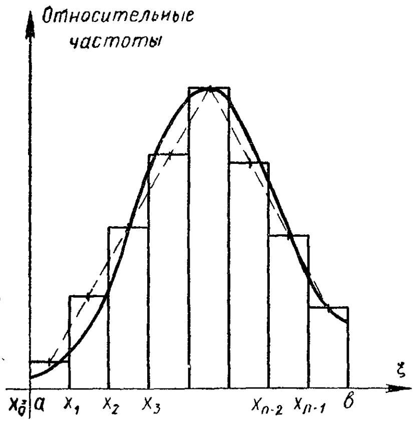

Рис. 21

Из (8.5) непосредственно следует

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt, \qquad (8.6)$$

т. е., зная плотность распределения, можно найти функцию распределения. Из (8.6) следует

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha) = \boldsymbol{P}(\alpha \leqslant \xi < \beta). \qquad (8.7)$$

Таким образом вероятность попадания ξ на интервал $[\alpha;\ \beta[$ представляется заштрихованной площадью на рис. 22.

Примеры

1. Плотность распределения случайной величины ξ

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0\\ \frac{1}{2}\sin x & \text{при } 0<x\leqslant\pi\\ 0 & \text{при } x>\pi\end{cases}$$

Найти вероятность попадания ξ на интервал $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

По формуле (8.7)

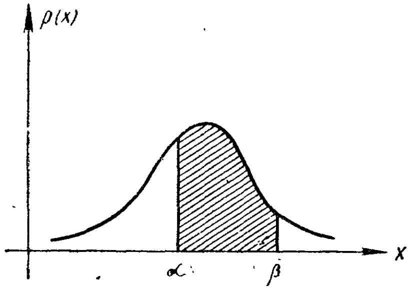

Рис. 22

$$P\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\xi<\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2. Плотность распределения случайной величины ξ

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant-\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{2}\cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{при } x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Найти вероятность того, что $\xi\leqslant\frac{\pi}{6}$.

По формуле (8.7)

$$P\left(\xi\leqslant\frac{\pi}{6}\right)=P\left(-\infty<\xi\leqslant\frac{\pi}{6}\right)=\int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}}p(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}0\cdot dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x dx=\frac{1}{2}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}.$$

Пусть непрерывная случайная величина ξ распределена на интервале $[a;\ b[$ с плотностью $p(x)$. Разделим интервал $[a;\ b[$ на n необязательно равных частей $[a;\ x_1[;\ [x_1;\ x_2[;\ \ldots\ [x_{n-1};\ b[$.

Случайная величина ξ принимает
значения из интервала $[a;\ x_1[$ с вероятностью $P(a \leqslant \xi < x_1)$;
—»— » —»— $[x_1;\ x_2[$ » —»— $P(x_1 \leqslant \xi < x_2)$;
—»— » —»— $[x_2;\ x_3[$ » —»— $P(x_2 \leqslant \xi < x_3)$;
. . . .
. . . .
—»— » —»— $[x_{n-1};\ b[$ » —»— $P(x_{n-1} \leqslant \xi < b)$.

Пусть $\xi_i \in [x_i;\ x_{i+1}[$. Тогда по аналогии с формулой (7.3) математическое ожидание случайной величины ξ приближенно равно:

$$M(\xi) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i P(x_i \leqslant \xi < x_{i+1}).$$

Разумеется, что

$$M(\xi) = \lim_{\max(x_{i+1}-x_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i P(x_i \leqslant \xi < x_{i+1})$$

при $n \to \infty$. Обозначим $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$, а $\max \Delta x_i = \lambda$. Тогда

$$M(\xi) = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i P(x_i \leqslant \xi < x_{i+1}).$$

В силу формулы (8.3)

$$M(\xi) = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (F(x_{i+1}) - F(x_i)).$$

По формуле Лагранжа

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i^*)\,\Delta x_i = p(\xi_i^*)\,\Delta x_i, \text{ где } x_i \leqslant \xi_i' \leqslant x_{i+1},$$

следовательно,

$$M(\xi) = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i\, p(\xi_i^*)\,\Delta x_i = \int_a^b xp(x)\,dx. \tag{8.8}$$

В случаях, когда область распределения ξ не указана,

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx. \tag{8.9}$$

Последний интеграл представляет собой

$$\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to\infty}} \int_\alpha^\beta xp(x)dx,$$

поэтому его решение не вызывает осложнений.

Примеры

1. Плотность распределения случайной величины ξ $P(x) = e^{-ax}$. Найти $M(\xi)$ для $x \geqslant 0$ и $a > 0$.

По формуле (8.9)

$M(\xi) = \int\limits_0^\infty xe^{-ax}\,dx$. Рассмотрим последовательно вычисление этого интеграла.

$$\int xe^{-ax}\,dx = \int udv, \text{ где } u = x, \text{ а } dv = e^{-ax}\,dx.$$

Известно, что $d(uv) = vdu + udv$. Проинтегрировав последнее равенство, находим

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

В нашем случае $du = dx$, $v = -\frac{1}{a}e^{-ax}$. Поэтому

$$\int xe^{-ax}\,dx = x\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right) - \int\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)dx =$$

$$= -\frac{x}{a}e^{-ax} + \frac{1}{a}\int e^{-ax}\,dx = -\frac{x}{a}e^{-ax} - \frac{1}{a^2}e^{-ax}.$$

Таким образом $M(\xi) = \int\limits_0^\infty xe^{-ax}\,dx = \lim\limits_{\alpha\to\infty}\int\limits_0^\alpha xe^{-ax}\,dx =$

$$= \lim_{\alpha\to\infty}\left(-\frac{x}{a}e^{-ax} - \frac{1}{a^2}e^{-ax}\right)\Bigg|_0^\alpha = \lim_{\alpha\to\infty}\left(-\frac{\alpha}{a}e^{-a\alpha} - \frac{1}{a^2}e^{-a\alpha} + \frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{a^2}.$$

2. Плотность распределения случайной величины ξ $p(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}$. Найти неизвестный параметр a.

По формуле (8.7) и в силу (3) и (4) свойств $F(x)$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{a}{e^x + e^{-x}}\,dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1,$$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{a} \tag{8.10}$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \operatorname{arctg} e^x. \text{ Тогда}$$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to\infty}}\int\limits_\alpha^\beta \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to\infty}} \operatorname{arctg} e^x\Bigg|_\alpha^\beta = \lim_{\beta\to\infty}\operatorname{arctg} e^\beta -$$

$$-\lim_{\alpha\to-\infty}\operatorname{arctg} e^{\alpha} = \operatorname{arctg}\infty - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Значит, $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{a}$, откуда $a = \frac{2}{\pi}$.

3. ДИСПЕРСИЯ

Согласно формулам (7.9) и (8.9) дисперсия

$$D(\xi) = M(\xi - M(\xi))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^2\, p(x)\, dx,$$

а согласно формулам (7.10) и (8.9) —

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\, dx\right)^2 \tag{8.11}$$

Пример

Плотность распределения случайной величины ξ

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0 \\ 2x^2 & \text{при } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Найти $D(\xi)$.

По формуле (8.11)

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\, dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x^2 \times$$

$$\times 2x^2\, dx + \int_{1}^{\infty} x^2 \cdot 0 \cdot dx - \left(\int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x \cdot 2x^2\, dx + \int_{1}^{\infty} x \cdot 0 \cdot dx\right)^2 =$$

$$= 2\int_{0}^{1} x^4 dx - \left(2\int_{0}^{1} x^3 dx\right)^2 = 2 \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \left(2 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right)^2 = \frac{3}{20}.$$

4. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Нормальным называют распределение непрерывной случайной величины ξ с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{8.12}$$

Определим вероятностный смысл параметров a и σ.

$$M(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

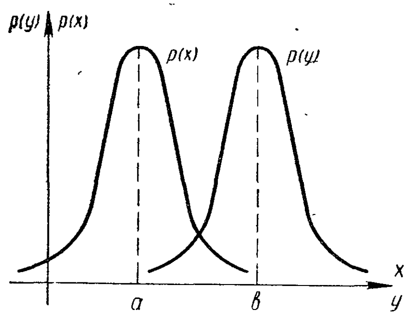

Рис. 23

Введем новую переменную $t = \frac{x-a}{\sigma}$. Отсюда $x = \sigma t + a$, $dx = \sigma dt$. Учитывая, что новые пределы интегрирования равны старым, получаем

$$M(\xi) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t + a)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt +$$

$$+ \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Поскольку под знаком первого интеграла нечетная функция и пределы интегрирования симметричны относительно начала координат, то этот интеграл равен нулю.

Так называемый интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi},$$

поэтому

$$M(\xi) = a,$$

т. е. параметр a означает математическое ожидание нормально распределенной случайной величины ξ.

$$D(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma^2,$$

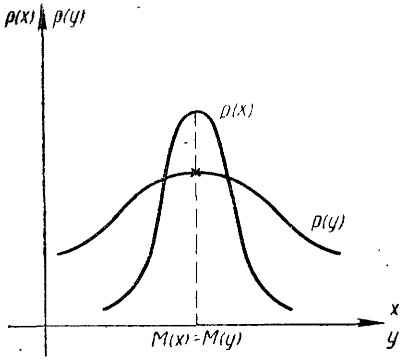

Рис. 24

поэтому параметр σ означает среднее квадратическое отклонение нормального распределения.

Когда $a=0$ и $\sigma^2=1$, то нормальное распределение с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

называют нормированным. График плотности нормального распределения представляет собой колоколообразную кривую. Точкой максимума плотности является $M(\xi)=a$, высота «колокола» равна $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Полезно запомнить следующие зависимости:

1) Если при равных дисперсиях $M(x) = a < M(y) = b$, то графики плотностей распределения случайных величин x и y по форме и высоте одинаковые, но график плотности распределения правее (рис. 23).

2) Если при равных математических ожиданиях $D(x) < D(y)$, то графики плотностей максимумов достигают в той же самой точке, но график плотности распределения y ниже и шире (рис. 24).

Мы уже знаем, что если случайная величина ξ распределена с плотностью $p(x)$, то вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее интервалу $[\alpha; \beta[$, равна:

$$P(\alpha \leqslant \xi < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)\,dx.$$

Пусть случайная величина ξ распределена по нормальному закону, тогда вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее интервалу $[\alpha; \beta[$, равна

$$P(\alpha \leqslant \xi < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Введем новую переменную $t = \frac{x-a}{\sigma}$. Отсюда $x = \sigma t + a$ и $dx = \sigma dt$. Когда $x = \alpha$, то $t = \frac{\alpha - a}{\sigma}$; когда $x = \beta$, $t = \frac{\beta - a}{\sigma}$. Подстановка новой переменной и новых пределов интегрирования дает

$$P(\alpha \leqslant \xi < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} \sigma e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right].$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

функция Лапласа, значения которой представлены в таблице 4.

Следовательно, для нормально распределенного ξ имеет место

$$P(\alpha \leqslant \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (8.13)$$

Примеры

1. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону, $\boldsymbol{M}(\xi) = 40$, $\boldsymbol{D}(\xi) = 100$. Найти вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее интервалу [20; 60[.

По формуле (8.13)

$$P(20 \leqslant \xi < 60) = \Phi\left(\frac{60-40}{\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(\frac{20-40}{\sqrt{100}}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) =$$

$$= \Phi(2) + \Phi(2) = 2\Phi(2).$$

По таблице 4 $\Phi(2) = 0{,}4772$.

Отсюда искомая вероятность

$$P(20 \leqslant \xi < 60) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

2. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону. $\boldsymbol{M}(\xi) = a$; $\boldsymbol{D}(\xi) = \sigma^2$. Найти вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее интервалу $[a - 3\sigma;\ a + 3\sigma]$.

По формуле (8.13)

$$P(a - 3\sigma \leqslant \xi \leqslant a + 3\sigma) = \Phi\left(\frac{a + 3\sigma - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - 3\sigma - a}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3).$$

По таблице 4 $\Phi(3) = 0{,}49865$. Отсюда $P(a - 3\sigma \leqslant \xi \leqslant a + 3\sigma) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$, что равносильно

$$P(|\xi - a| \leqslant 3\sigma) = 0{,}9973.$$

Нами доказано так называемое правило трех сигм: *если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратичного отклонения. Такое событие происходит почти наверняка.*

5. ПОНЯТИЕ О ТЕОРЕМЕ ЛЯПУНОВА

Мы уже упомянули, что нормально распределенные случайные величины широко встречаются на практике. Чем это объяснить? Выдающимся русским математиком А. М. Ляпуновым была доказана центральная предельная теорема теории вероятностей, из которой вытекает следующее следствие: *если случайная величина ξ представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то ξ имеет распределение, близкое к нормальному.*

1. Производится измерение некоторой физической величины. Любое измерение дает лишь приближенное значение измеряемой величины, так как на результат измерения оказывают влияние многие независимые между собой факторы (влажность, слой пыли на приборе, температура, вибрация прибора и т. д.). В результате влияния каждого из этих факторов рождается ничтожная случайная ошибка. Поскольку число этих факторов велико, совокупное их действие порождает уже заметную суммарную ошибку. Эту суммарную ошибку мы можем рассматривать как сумму большого числа взаимно не зависимых ошибок, т. е. суммарную ошибку ξ можем рассматривать как случайную величину, которая распределена по закону, близкому к нормальному. Практически это значит, что

$$P(a \leqslant \xi \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b - M(\xi)}{\sqrt{D(\xi)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - M(\xi)}{\sqrt{D(\xi)}}\right).$$

Примером практического применения вышеизложенного следствия теоремы Ляпунова может послужить такая задача:

Известно, что среднее значение случайной погрешности весов $\bar{x} = 0{,}03$ кг, дисперсия $\sigma^2 = 0{,}0016$.

1. Какова вероятность того, что при очередном взвешивании погрешность показания весов $|\alpha| \leqslant 0{,}04$?

2. Найти доверительный интервал погрешности этих весов с гарантией в 95%.

Пусть ξ — случайная погрешность. Можно считать, что ξ распределена по закону, близкому к нормальному. Поэтому

$$P(-0{,}04 \leqslant \xi \leqslant 0{,}04) \approx \Phi\left(\frac{0{,}04 - 0{,}03}{\sqrt{0{,}0016}}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}04 - 0{,}03}{\sqrt{0{,}0016}}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}25) - \Phi(-1{,}75) = \Phi(0{,}25) + \Phi(1{,}75).$$

По таблице 4 $\Phi(0{,}25) = 0{,}0987$, а $\Phi(1{,}75) = 0{,}4599$. Поэтому

$$P(-0{,}04 \leqslant \xi \leqslant 0{,}04) \approx 0{,}5586.$$

На второй вопрос ответ находим так:

$$P(a \leqslant \xi \leqslant b) = \Phi\left(\frac{b - 0{,}03}{\sqrt{0{,}0016}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0{,}03}{\sqrt{0{,}0016}}\right) = 0{,}95.$$

Поскольку a и b симметричны в отношении 0,03, то $a = 0{,}03 - \varepsilon$, а $b = 0{,}03 + \varepsilon$. Значит, $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}04}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{0{,}04}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}04}\right) = 0{,}95$. Отсюда $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}04}\right) = 0{,}475$. Такому значению $\Phi(x)$ в таблице 4 соответствует $x = 1{,}96$. Таким образом $\frac{\varepsilon}{0{,}04} = 1{,}96$ и $\varepsilon = 0{,}0784$. Тогда $a = 0{,}03 - 0{,}0784 = -0{,}0484$; $b = 0{,}03 + 0{,}0784 = 0{,}1084$. Значит, с гарантией в 95% доверительный интервал случайной погрешности весов [—0,0484; 0,1084].

Упомянутое следствие теоремы Ляпунова позволяет также оценить вероятность события по экспериментальным данным.

Пусть исследователь при проведении n независимых испытаний обнаружил, что его интересующий факт A имел место в m случаях. Он фиксирует, что относительная частота появления факта A равна $\frac{m}{n}$. Но исследователя интересует сама вероятность появления факта A при одном испытании. Он знает, что $p \approx \frac{m}{n}$, но какая тут степень приближенности.

Относительная частота $\frac{m}{n}$ есть случайная величина ξ, математическое ожидание которой $M(\xi) = p$, а дисперсия $D(\xi) = \frac{p(1-p)}{n}$. При достаточно большом n ($n \geqslant 30$), ξ распределено по закону, близкому к нормальному, поэтому согласно формуле (8.13)

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{8.14}$$

Последняя формула может быть использована для решения ряда практических задач. Несколько из них представляем читателю.

2. 15% продукции фабрики представляют изделия второго сорта. Магазин получил 1000 изделий. Какова вероятность того, что в полученной партии продукция второго сорта составит $15\% \pm 2\%$?

По условию задачи $p = 0{,}15$, $\varepsilon = 0{,}02$, $n = 1000$. Пусть α — ожидаемая доля продукции второго сорта. Находим σ.

$\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0{,}15(1-0{,}15)}{1000} = 0{,}0001275$. Следовательно,

$\sigma = \sqrt{0{,}0001275} = 0{,}0113$. Тогда

$$P(|\alpha - 0{,}15| \leqslant 0{,}02) \approx 2\Phi\left(\frac{0{,}02}{0{,}0113}\right) = 2\Phi(1{,}77).$$

По таблице 4 $\Phi(1{,}77) = 0{,}4616$, поэтому

$$P(|\alpha - 0{,}15| \leqslant 0{,}02) \approx 0{,}9239.$$

Ответ можно сформулировать и так: с гарантией в 92% в полученной партии изделия второго сорта составят $15\% \pm 2\%$.

3. Исследованиями установлено, что 20% школьников не знают правил уличного движения. В случайной выборке 1600 учеников. Сколько учеников знают правила уличного движения с гарантией в 95%?

По условию задачи $n = 1600$, $p = 0{,}8$. Пусть α — доля учащихся этой «выборки», знающих правила уличного движения. Тогда $P(|\alpha - 0{,}8| \leqslant \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0{,}95$.

$$\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{1600}} = 0,01, \text{ поэтому}$$

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,01}\right) = 0,95; \; \Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,01}\right) = 0,475.$$

По таблице 4 значению 0,475 соответствует $x = 1,96$, т. е. $\frac{\varepsilon}{0,01} = 1,96$ и $\varepsilon = 0,0196$. Значит, с вероятностью 0,95

$$0,8 - 0,0196 \leqslant \alpha \leqslant 0,8 + 0,0196;$$
$$0,7804 \leqslant \alpha \leqslant 0,8196$$

или приближенно $0,78 \leqslant \alpha \leqslant 0,82$. Но 0,78 от 1600 составляет 1248, а 0,82 от 1600 — 1312. Значит, с гарантией в 95% число учеников, знающих правила уличного движения, принадлежит интервалу [1248; 1312].

4. При массовом производстве обуви брак составляет 4% выпускаемой продукции. Сколько изделий нужно отобрать для проверки качества продукции, чтобы с вероятностью 0,9 можно было бы утверждать, что в случайном наборе обуви доля брака по абсолютной величине отличается от 4% не более чем на 1%?

По условию задачи $p = 0,04$, $\varepsilon = 0,02$, n неизвестно. Пусть α — доля брака в случайной партии изделий. Случайная величина α распределена по закону, близкому к нормальному, поэтому

$$P(|\alpha - 0,04| \leqslant 0,01) \approx 2\Phi\left(\frac{0,01}{\sigma}\right) = 0,9.$$

Отсюда

$$\Phi\left(\frac{0,01}{\sigma}\right) = 0,45 \text{ и по таблице 4 } \frac{0,01}{\sigma} = 1,65.$$

Но $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0,04(1-0,04)}{n} = \frac{0,04 \cdot 0,96}{n}$ и $\sigma = \sqrt{\frac{0,04 \cdot 0,96}{n}}$.

Подстановкой σ в предыдущее уравнение находим $\frac{0,01}{\sqrt{\frac{0,04 \cdot 0,96}{n}}} = 1,65$, откуда $n = 1045$.

Упражнения

186. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины ξ равно 10, а дисперсия 4. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина ξ примет значение из интервала [12; 14].

187. Случайная величина ξ распределена нормально. $M(\xi) = 20$, $D(\xi) = 25$. Найти $P(15 < \xi < 25)$.

188. Производится измерение диаметра вала без системных ошибок. Случайные ошибки ξ подчинены нормальному закону с $D(\xi) = 100$ мм. Найти $P(|\xi| < 15)$.

189. Для замера напряжений используются специальные тензодатчики. Определить среднюю квадратическую ошибку тензодатчика, если он систематических ошибок не имеет, а случайные распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы $\pm 0{,}2$ мк.

190. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то его размер считается приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика ξ есть случайная величина с такими числовыми характеристиками: $\boldsymbol{M}(\xi) = \frac{d_1 + d_2}{2}$, $\boldsymbol{D}(\xi) = \frac{(d_2 - d_1)^2}{16}$. Определить вероятность p того, что шарик будет забракован.

191. При массовом производстве 5% выпускаемой продукции выходит в брак. Сколько изделий нужно отобрать для проверки качества, чтобы с вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что в случайной партии изделий брак составляет $5\% \pm 2\%$?

192. Какой величины должно быть поле допуска зубчатого колеса, чтобы с вероятностью не более 0,003 изготовленное колесо с контролируемым размером оказалось вне поля допуска. Случайные отклонения размера ξ от середины поля допуска подчинены закону нормального распределения с характеристиками $\boldsymbol{M}(\xi) = 0$ и $\boldsymbol{D}(\xi) = 25$.

6. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Показательным называют распределение вероятностей, которое описывается плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ ke^{-kx} \text{ при } x \geqslant 0, \end{cases} \tag{8.15}$$

где $e = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, а k — положительная константа.

Читатель заметит, что с возрастанием x плотность $p(x)$ убывает Это значит, что x можно представить как время, а $p(x)$ — как вероятность безотказной работы какого-нибудь устройства: со временем эта вероятность в результате износа устройства постепенно убывает.

Согласно формуле (8.7) вероятность того, что случайная величина ξ, распределенная по показательному закону, примет значение из интервала $]a; b[$, равна

$$\int_a^b ke^{-kx}\,dx = -\int_a^b e^{-kx}\,d(-kx) = -e^{-kx}\Big|_a^b = e^{-ka} - e^{-kb}. \tag{8.16}$$

Функция распределения такой случайной величины

$$P(\xi < x) = F(x) = \int_0^x ke^{-kx}\,dx = 1 - e^{-kx} \tag{8.17}$$

означает вероятность того, что отказ наступит до момента времени x. Поскольку

$$P(\xi < x) + P(\xi \geqslant x) = 1,$$

то

$$P(\xi \geqslant x) = 1 - P(\xi < x) = e^{-kx} \tag{8.18}$$

означает вероятность того, что отказ до момента x не наступит. Логично вероятность $P(\xi \geqslant x)$ называть функцией надежности устройства. Итак

$$R(x) = P(\xi \geqslant x) = e^{-kx}. \tag{8.19}$$

Какой смысл константы k?

Вычислим математическое ожидание величины ξ.

$$M(\xi) = \int_0^\infty xp(x)\,dx = \int_0^\infty xke^{-kx}dx = -\int_0^\infty xe^{-kx}d(-kx).$$

Пусть $x = u$, $e^{-kx}\,d(-kx) = dv$. Тогда $du = dx$, $v = e^{-kx}$. По формуле $\int udv = uv - \int vdu$

$$M(\xi) = -xe^{-kx}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-kx}\,dx = -\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{kt}} - \frac{1}{k}\lim_{t\to\infty} e^{-kx}\Big|_0^t =$$

$$= -\frac{1}{k}\lim_{t\to\infty} e^{-kt} + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Таким образом $\frac{1}{k}$ означает среднее время исправности до отказа, а k — интенсивность отказов (число отказов на единичный интервал времени).

Примеры

1. Время безотказной работы электронной лампы ξ распределено по закону $p(x) = 0{,}03e^{-0{,}03x}$, где x означает время в часах. Найти вероятность того, что лампа проработает безотказно не меньше 100 часов.

По формуле (8.19)

$$P(\xi \geqslant 100) = R(100) = e^{-0{,}03\cdot 100} = e^{-3} = 0{,}0498.$$

2. 98% топливных насосов дизельных тракторов выходит из строя после 3000 моточасов. Какова вероятность того, что насос выйдет из строя в интервале времени от 2000 до 2500 моточасов?

Пусть ξ — время безотказной работы насоса. По условию задачи $P(\xi \geqslant 3000) = R(3000) = e^{-3000k} = 0{,}98$.

Из этого уравнения находим $k = 0{,}0000067$. Значит, плотность распределения равна $p(x) = 0{,}0000067\ e^{-0{,}0000067x}$. По формуле (8.16) $\boldsymbol{P}(2000 \leqslant \xi \leqslant 2500) = e^{-2000 \cdot 0{,}0000067} - e^{-2500 \cdot 0{,}0000067} = 0{,}0033$.

IX. НЕМНОЖКО СТРАННО, НО ИНТЕРЕСНО

1. УМНАЯ ИГЛА (ЗАДАЧА БЮФФОНА)

Читателю, конечно, известна формула длины окружности $C = 2\pi R$, где π — трансцендентное число, значение которого с точностью до сотых равно 3,14. Известны многие способы определения числа π с большей точностью. Один из этих способов использует обыкновенную швейную иглу.

Проведем на листе бумаги ряд параллельных прямых, соблюдая следующие правила:

1) расстояние между этими параллельными одинаковы;

2) расстояние между двумя соседними параллельными больше длины иглы;

3) построенный чертеж (похожий на бумагу в линейку) достаточно большой, чтобы случайно брошенная игла не упала за пределы чертежа (рис. 25).

Пусть расстояние между параллельными прямыми равно a и длина иглы l $(l < a)$. Положение случайным образом брошенной на чертеж иглы определяется расстоянием x от ее середины до ближайшей прямой и углом φ, который игла образует с перпендикуляром, опущенным из середины иглы на ближайшую прямую (рис. 26).

Ясно, что $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Изобразим графически (рис. 27) функцию $x = \frac{l}{2}\cos\varphi$.

Определим вероятность события A — «брошенная случайно на чертеж игла пересекает одну из параллельных прямых»:

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{r}{m},$$

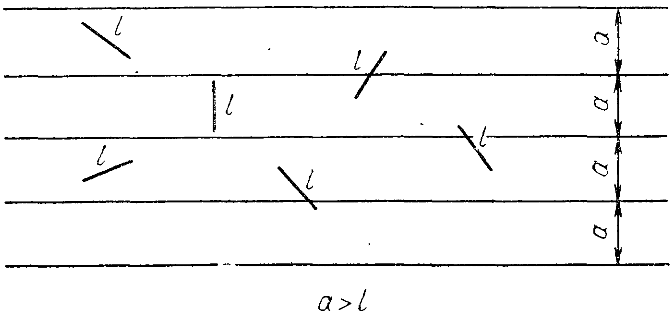

Рис. 25

где m — общее «число» возможных положений брошенной иглы, а r — «число» тех возможных положений, когда игла пересекает одну из параллельных прямых. Ни m, ни r непосредственно сосчитать не можем: таких положений бесконечно много. Но в случае пересечения иглой одной из параллелей должно иметь место неравенство:

$$x \leqslant \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

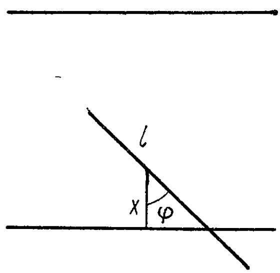

Рис. 26

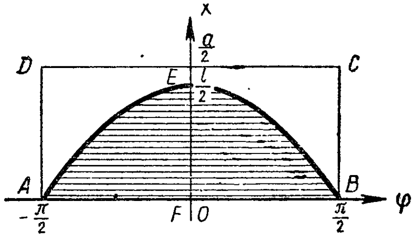

Рис. 27

Такому условию удовлетворяют координаты тех точек, которые расположены на участке BEA. Вместе с тем всевозможные расположения иглы характеризуются точками, которые расположены на участке $ABCD$.

Таким образом, вспомнив, как вычисляют геометрические вероятности, находим, что

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{\text{пл. } BEA}{\text{пл. } ABCD}.$$

Но пл. $ABCD = \frac{a\pi}{2}$, а пл. $BEA = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \cos \varphi \, d\varphi =$

$$= \frac{l}{2} \sin \varphi \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = l.$$

Тогда

$$\text{пл. } BEA = l$$

и

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{2l}{a\pi},$$

откуда

$$\pi \doteq \frac{2l}{a\boldsymbol{P}(A)}.$$

Но вероятность $\boldsymbol{P}(A)$ можно приблизительно определить многократным бросанием иглы. Если, например, иглу бросали на чертеж s раз и k раз она упала, пересекая одну из параллелей, то при достаточно большом s

$$\boldsymbol{P}(A) \approx \frac{k}{s},$$

откуда

$$\pi \approx \frac{2ls}{ak}.$$

Мы нашли формулу, позволяющую определить число π. Известны такие опыты:

Ученый-испытатель	Год проведения испытаний	Число бросаний иглы	Полученное значение
Вольф	1850	5000	3,1596
Фокс	1834	1120	3,1419
Лазаринни	1901	3408	3,1416

Предлагаем читателю самому убедиться в «мудрости» иглы.

2. ЗАДАЧА ШЕВАЛЬЕ ДЕ МЕРЕ

В средние века среди феодальной знати были широко распространены азартные игры. Большим любителем азартных игр был французский шевалье де Мере, которому посчастливилось дружить с замечательным математиком Б. Паскалем. Де Мере не только играл в кости, но и подмечал некоторые закономерности, объяснить которые не мог, и в таких случаях обращался к Б. Паскалю.

Де Мере предлагал партнерам следующие условия игры: он будет бросать 2 кости 24 раза и выиграет, если хоть один раз появятся 2 шестерки. Его соперник бросает 4 кости один раз и выиграет, если появится хотя бы одна шестерка.

С первого взгляда кажется, что шевалье де Мере схитрил, избрав себе более благоприятные условия: все-таки он бросает 24 раза, а его соперник только один раз. Но он чаще проигрывал, нежели выигрывал. Удивленный де Мере обратился к Б. Паскалю.

Разберемся и мы с вами в том, что ответил Б. Паскаль.

Пусть событие A — «одновременное появление хотя бы одной пары шестерок при 24-кратном бросании 2 костей».

Пусть событие B — «появление хотя бы одной шестерки при однократном бросании 4 костей».

Событию A противоположно событие $\overline{A}$ — «ни разу не появилась пара шестерок при 24-кратном бросании 2 костей».

Обозначим событие $\overline{A}_i$ — «не появилась пара шестерок при i-м бросании». Ясно, что

$$\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\ldots\overline{A}_{24}.$$

Поскольку события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_{24}$ независимы, то

$$\boldsymbol{P}(\overline{A}) = \boldsymbol{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{24}) = \boldsymbol{P}(\overline{A}_1)\cdot\boldsymbol{P}(\overline{A}_2)\ldots\boldsymbol{P}(\overline{A}_{24}).$$

Также ясно, что

$$\boldsymbol{P}(\overline{A}_1) = \boldsymbol{P}(\overline{A}_2) = \ldots = \boldsymbol{P}(\overline{A}_{24}),$$

поэтому вероятность $\boldsymbol{P}(\overline{A})$ может быть выражена так:

$$\boldsymbol{P}(\overline{A}) = (\boldsymbol{P}(\overline{A}_1))^{24}.$$

Вычислим $\boldsymbol{P}(\overline{A}_i)$. При бросании двух костей может произойти $n = 36$ разных событий. Событию $\overline{A}_1$ благоприятствуют $m = 35$ событий. Поэтому

$$\boldsymbol{P}(\overline{A}_i) = \frac{35}{36};\ \boldsymbol{P}(\overline{A}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

Вероятность удачи шевалье де Мере:

$$\boldsymbol{P}(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}491\,404.$$

Вычислим вероятность удачи соперника. Пусть событию B противоположно событие $\overline{B}$ — «не появилась ни одна шестерка при однократном бросании 4 костей».

Пусть событие $\overline{B}_i$ — «не появилась шестерка на i-й кости». Тогда $\overline{B} = \overline{B}_1\cdot\overline{B}_2\cdot\overline{B}_3\cdot\overline{B}_4$.

Поскольку события $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \overline{B}_3, \overline{B}_4$ независимы, то

$$\boldsymbol{P}(\overline{B}) = \boldsymbol{P}(\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{B}_4) = \boldsymbol{P}(\overline{B}_1)\cdot\boldsymbol{P}(\overline{B}_2)\cdot\boldsymbol{P}(\overline{B}_3)\cdot\boldsymbol{P}(\overline{B}_4).$$

Ясно, что $\boldsymbol{P}(\overline{B}_1) = \boldsymbol{P}(\overline{B}_2) = \boldsymbol{P}(\overline{B}_3) = \boldsymbol{P}(\overline{B}_4)$, $\boldsymbol{P}(\overline{B}) = (\boldsymbol{P}(\overline{B}_1))^4$. При бросании одной кости может произойти $n = 6$ разных событий. Событию $\overline{B}_i$ благоприятствуют $m = 5$ событий. Тогда

$$\boldsymbol{P}(\overline{B}_i) = \frac{5}{6},\ \boldsymbol{P}(\overline{B}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

Таким образом, вероятность удачи соперника

$$\boldsymbol{P}(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}517747.$$

Оказывается, что $\boldsymbol{P}(A) < \boldsymbol{P}(B)$. Действительно, наблюдение получило научное объяснение.

3. ОТДАЙТЕ МОЮ ШАПКУ

В один из январских вечеров члены общества охотников собрались обсудить итоги прошедшего сезона. В помещении было прохладно, и они заходили в зал в пальто, а шапки оставляли в гардеробе.

Собрание длилось до сумерек, и вдруг погас свет. Пришлось расходиться, но в темноте трудно узнать свою шапку. Председатель собрания предложил каждому надеть наудачу любую шапку, а завтра каждый вернется за своей шапкой. Все с этим предложением согласились, а один охотник в утешение собравшимся сказал: «Надеюсь одному из нас и сегодня досталась своя шапка». Разберемся, насколько обоснованным является его предположение.

Пронумеруем участников собрания: 1, 2, 3, ..., n. Пусть событие A_i — «i-й участник собрания надел свою шапку». Тогда событие

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

означает — «по крайней мере один участник надел свою шапку». Поскольку события $A_1, A_2, \dots, A_n$ не являются несовместимыми, то вычисление $\boldsymbol{P}(A)$ осложняется.

Пусть A_1 и A_2 — совместимые события, тогда по формуле (5.2)

$$\boldsymbol{P}(A_1 + A_2) = \boldsymbol{P}(A_1) + \boldsymbol{P}(A_2) - \boldsymbol{P}(A_1A_2).$$

Если A_1, A_2 и A_3 — совместимые события, то

$$\boldsymbol{P}(A_1 + A_2 + A_3) = \boldsymbol{P}(A_1) + \boldsymbol{P}(A_2) + \boldsymbol{P}(A_3) - \\ -\boldsymbol{P}(A_1A_2) - \boldsymbol{P}(A_1A_3) - \boldsymbol{P}(A_2A_3) + \boldsymbol{P}(A_1A_2A_3).$$

Сравнение $\boldsymbol{P}(A_1 + A_2)$ и $\boldsymbol{P}(A_1 + A_2 + A_3)$ подсказывает, что

$$\boldsymbol{P}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = S_{1n} - S_{2n} + S_{3n} - S_{4n} + \dots \pm S_{nn}, \quad (9.1)$$

где $S_{1n} = \boldsymbol{P}(A_1) + \boldsymbol{P}(A_2) + \dots + \boldsymbol{P}(A_n)$,

$S_{2n} = \boldsymbol{P}(A_1A_2) + \boldsymbol{P}(A_1A_3) + \dots + \boldsymbol{P}(A_{n-1}A_n)$,

$S_{3n} = P(A_1A_2A_3) + \boldsymbol{P}(A_1A_2A_4) + \dots + \boldsymbol{P}(A_{n-2}A_{n-1}A_n)$,

. . . .

$S_{nn} = P(A_1A_2 \dots A_n)$.

Проверим истинность предположения методом математической индукции. Допустим, что формула (9.1) справедлива, и определим:

$$\boldsymbol{P}(A_1 + A_2 + \dots + A_n + A_{n+1}).$$

Пусть события: $B = A_1 + A_2 + \dots + A_n$. Тогда

$$\boldsymbol{P} = (A_1 + A_2 + \dots + A_n + A_{n+1}) = \boldsymbol{P}(B + A_{n+1}) = \\ = \boldsymbol{P}(B) + \boldsymbol{P}(A_{n+1}) - \boldsymbol{P}(BA_{n+1}) = S_{1n} - S_{2n} + \dots \pm \\ \pm S_{nn} + \boldsymbol{P}(A_{n+1}) - \boldsymbol{P}(BA_{n+1}) = (S_{1n} + \boldsymbol{P}(A_{n+1})) - \\ - (S_{2n} + \boldsymbol{P}(A_1A_{n+1}) + \boldsymbol{P}(A_2A_{n+1}) + \dots + \\ + \boldsymbol{P}(A_nA_{n+1})) + (S_{3n} + \boldsymbol{P}(A_1A_2A_{n+1}) + \\ + \boldsymbol{P}(A_1A_3A_{n+1}) + \dots + \boldsymbol{P}(A_{n-1}A_nA_{n+1})) - \\ - \dots \mp \boldsymbol{P}(A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}) = \\ = S_{1,\,n+1} - S_{2,\,n+1} + S_{3,\,n+1} - S_{4,\,n+1} + \dots \mp S_{n+1,\,n+1},$$

что и доказывает справедливость формулы (9.1).

Поскольку n шапок могут быть надеты на n голов $n!$ способами, то в случае, если i-й участник надевает свою шапку, остальные $n-1$ шапки могут быть надеты на $n-1$ голову $(n-1)!$ способами. Поэтому

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Если же два участника, i-й и j-й, надевают свои шапки, то остальные шапки могут быть переставлены $(n-2)!$ способами.

Следовательно, $P(A_iA_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$,

Соответственно

$$P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = \frac{1}{n!}.$$

Сумма S_{1n} имеет n членов, поэтому

$$S_{1n} = \frac{1}{n}\cdot n = 1.$$

Сумма S_{2n} имеет C_n^2 членов, поэтому

$$S_{2n} = \frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{n(n-1)}{2!} = \frac{1}{2!}.$$

Аналогично

$$S_{3n} = \frac{1}{3!},\quad S_{4n} = \frac{1}{4!},\quad \ldots,\quad S_{nn} = \frac{1}{n!}.$$

Подставляя полученные значения в формулу (9.1), находим:

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots \pm \frac{1}{n!}.$$

Какова зависимость $P(A)$ от n?

n	3	4	5	6	7	100
$P(A)$	0,66667	0,62500	0,63333	0,63196	0,63214	0,63212

Результаты неожиданные: вероятность, что свою шапку получил хотя бы один из 3, почти такая же, как и вероятность, что свою шапку получит хотя бы один из 100. И в том и в другом случае вероятность около $\frac{2}{3}$. Так что надеяться, что хотя бы одному охотнику досталась его собственная шапка, действительно можно было.

4. МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ПАРАДОКС $1 = 1{,}7$

Одна метеорологическая станция правильно предсказывает погоду 9 раз из 10, другая — 8 раз из 10. На ближайшее воскресенье первая станция предсказывает событие R — «дождь», вторая — событие $\overline{R}$ — «ясная погода». Разберемся теперь, в чем софизм. Поскольку $R + \overline{R} = U$ — достоверное событие, $\boldsymbol{P}(R+\overline{R}) = 1$. Но события R и $\overline{R}$ несовместимы, поэтому $\boldsymbol{P}(R+\overline{R}) = \boldsymbol{P}(R) + \boldsymbol{P}(\overline{R})$. Значит, $\boldsymbol{P}(R) + \boldsymbol{P}(\overline{R}) = 1$.

Пусть событие A — «правильно предсказывает погоду первая станция», а событие B — «правильно предсказывает погоду вторая станция».

Тогда $\boldsymbol{P}(A) = 0{,}9$ и $\boldsymbol{P}(B) = 0{,}8$.

Если так, то выходит, что в воскресенье надо ожидать дождя с вероятностью $\boldsymbol{P}(R) = 0{,}9$, а ясной погоды — с вероятностью $\boldsymbol{P}(\overline{R}) = 0{,}8$.

$$1 = \boldsymbol{P}(R + \overline{R}) = \boldsymbol{P}(R) + \boldsymbol{P}(\overline{R}) = 0{,}9 + 0{,}8 = 1{,}7.$$

Парадокс $1 = 1{,}7$.

Где ошибка? Приходится признать, что допустили ее не метеорологи, а мы с вами.

Нельзя принимать, что $\boldsymbol{P}(R) = \boldsymbol{P}(A)$, $\boldsymbol{P}(\overline{R}) = \boldsymbol{P}(B)$. Ведь A и B не являются несовместимыми!

5. ЧТОБЫ ПОКУПАТЕЛИ БЫЛИ ДОВОЛЬНЫ

Колхоз продает огурцы в ящиках, по 100 огурцов в каждом ящике. Выяснилось, что в каждой партии из 1000 огурцов приблизительно 15 некачественных: гнилые, лопнувшие и т. д. Перед правлением колхоза встал вопрос, сколько огурцов надо положить в каждый ящик, чтобы с вероятностью 0,8 удовлетворить запросы покупателя, иначе говоря, чтобы в ящике было не менее 100 хороших огурцов с вероятностью 0,8.

По условию вероятность того, что купленный наудачу огурец окажется некачественным, 0,015. Находим постоянную Пуассона $k = 100 \cdot 0{,}015 = 1{,}5$.

По формуле (6.6) вероятность, что среди 100 наугад отобранных некачественных огурцов не встретится, равна $e^{-1{,}5} \approx 0{,}22313$. Допустим, что $100 + x$ является тем числом огурцов, при котором покупатель с вероятностью 0,8 получит 100 хороших. Пусть событие A — «среди $100 + x$ огурцов 100 качественных». Пусть событие A_k — «среди $100 + k$ огурцов ни одного некачественного». Тогда

$$A = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_x.$$

По формуле Пуассона (6.6)

$$\boldsymbol{P}(A_k) = e^{-1{,}5} \cdot \frac{(1{,}5)^k}{k!}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ x.$$

Поскольку

$$P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_x),$$

то

$$P(A)=e^{-1,5}\left(1+\frac{1,5}{1!}+\frac{(1,5)^2}{2!}+\ldots+\frac{(1,5)^x}{x!}\right)$$

Переменная x должна удовлетворять неравенству:

$$e^{-1,5}\left[1+\frac{1,5}{1!}+\frac{(1,5)^2}{2!}+\ldots+\frac{(1,5)^x}{x!}\right]\geqslant 0,8.$$

Ясно, что левая часть неравенства возрастает с ростом x. Испытаем некоторые конкретные значения x.

При $x = 1$ $P(A) = e^{-1,5} \cdot 2,5 \approx 0,56$, а это меньше 0,8.

При $x = 2$ $P(A) = e^{-1,5}\left(1+\frac{1,5}{1!}+\frac{(1,5)^2}{2!}\right)\approx e^{-1,5}\cdot 3,63 \approx 0,809.$

Поскольку $0,809 > 0,8$ для $x = 2$, покупатели останутся удовлетворены, если в каждый ящик упакованы 102 огурца.

Принцип решения данной задачи может широко использоваться для расчета запасов промышленных товаров, продуктов питания и т. д.

6. ПАРАДОКС БЕРТРАНА

Начертим окружность. Положив лист с чертежом на стол, бросим на него достаточно длинный стержень так, чтобы дуга окружности отсекла от стержня хорду (рис. 28).

Вычислим вероятность того, что отсеченная хорда окажется длиннее стороны вписанного правильного треугольника. Парадокс Бертрана проявится в том, что при разных способах решения получим разные ответы.

Первый способ решения.

Допустим, дуга окружности отсекает от стержня хорду AB. Построим диаметр CD, перпендикулярный к этой хорде. Построим также параллельно хорде сторону правильного вписанного тре-

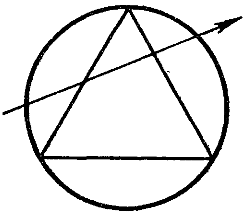

Рис. 28

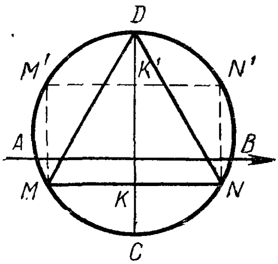

Рис. 29

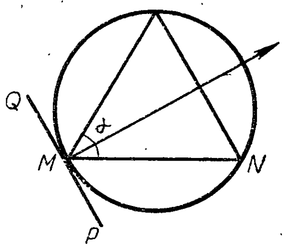

Рис. 30

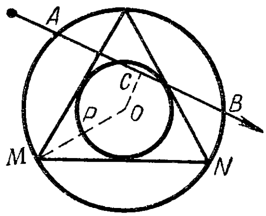

Рис. 31

угольника $|MN|$ (рис. 29). Те хорды, которые пройдут через точки отрезка диаметра KK', длиннее $|MN|$.

$$|CK| = \frac{1}{4}|CD|, \quad \text{а} \ |KK'| = \frac{1}{2}|CD|.$$

Следовательно, вероятность, что случайная хорда длиннее стороны вписанного правильного треугольника, равна $\frac{1}{2}$. Это первый ответ.

Второй способ решения.

Допустим, что один конец стержня прикреплен к точке M окружности. Те хорды, которые дуга отсекает при попадании во внутреннюю область угла α (рис. 30), будут длиннее стороны MN правильного треугольника.

Можно предположить, что все хорды, которые можно провести через точку M, одинаково «плотно» распределены по углу $QMP = \pi$. Поскольку $\alpha = \frac{\pi}{3}$, то вероятность, что случайная хорда превышает по длине сторону вписанного правильного треугольника, равна $\frac{1}{3}$.

Как видите, второй ответ не совпадает с первым.

Третий способ решения.

Чтобы установить положение хорды, достаточно знать положение ее середины. Понятно, что хорды, середины которых расположены в круге, вписанном в данный треугольник, превышают сторону по длине вписанного правильного треугольника (рис. 31).

Если случайно брошенный стержень упадет так, что середина C хорды AB окажется внутри меньшего круга, то хорда оказывается больше $|MN|$. Таким образом множество хорд, длина которых больше $|MN|$, может быть представлено площадью меньшего круга, а множество всех хорд, пересекающих данный круг, — площадью большего круга.

Поскольку $|OP| = \frac{1}{2}|OM|$, то площадь меньшего круга составляет $\frac{1}{4}$ площади большего круга. При этом способе решения находим: вероятность, что случайная хорда длиннее стороны правильного вписанного треугольника, равна $\frac{1}{4}$.

Три разных способа решения одной задачи и три разных ответа.

Вот вам и парадокс!

Казалось бы, во всех случаях мы рассуждали правильно, а все-таки вероятность одного и того же события оказывалась каждый раз иной!

Как объяснить этот парадокс?

Разные результаты мы получили потому, что по-разному конкретизировали понятие «случайно», фактически мы решали каждый раз новую задачу. Нам только казалось, что это прежняя задача.

В первом случае мы «катили» хорду по диаметру и, принимая длину отрезка за меру множества точек на нем, вычисляли отношение длины отрезков.

Во втором случае за меру множества точек, попадающих в определенный угол, приняли величину соответствующего угла и вычисляли отношение двух углов.

В третьем случае за меру множества точек избрали площадь, в которой эти точки расположены, и вычисляли отношение двух площадей.

Постановка задач во всех трех случаях, следовательно, разная.

7. СЛУЧАЙНОСТЬ ИЛИ СИСТЕМА?

Некий рассеянный гражданин N 12 раз был оштрафован за переход улицы в неположенном месте. Известно, что это всегда происходит либо во вторник, либо в четверг. Объясняется ли это случайностью или в эти дни милиция усиливает контроль уличного движения?

Пусть событие A — «гражданин N был оштрафован 12 раз по вторникам или четвергам случайно». Если событие A_k — «гражданин N случайно оштрафован во вторник или четверг k-й раз» ($k = 1, 2, 3, \ldots, 12$), то

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(A_1) \cdot \boldsymbol{P}(A_2) \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{P}(A_{12}).$$

Но $\boldsymbol{P}(A_k) = \frac{2}{7}$, ибо 2 дня из 7 для гражданина неудачные. Поскольку

$$\boldsymbol{P}(A_1) = \boldsymbol{P}(A_2) = \ldots = \boldsymbol{P}(A_{12}) = \frac{2}{7}, \text{ то}$$

$$\boldsymbol{P}(A) = \left(\frac{2}{7}\right)^{12} \approx 0{,}0000003.$$

Теперь сформулируем событие B — «гражданина N 12 раз случайно оштрафовали повторно в одни и те же 2 дня недели». Это событие является суммой таких событий: «гражданин N случайно был оштрафован 12 раз по понедельникам или по вторникам», «гражданин N случайно был оштрафован 12 раз по понедельникам и по средам», ..., «гражданин N был случайно оштрафован 12 раз по субботам или по воскресеньям».

Вероятности всех этих событий, так же как и вероятность $\boldsymbol{P}(A)$, равны 0,0000003. Поскольку таких событий может быть $C_7^2 = 21$, то $\boldsymbol{P}(B) = 21 \cdot 0{,}0000003 \approx 0{,}000006$. Видно, что обе вероятности $\boldsymbol{P}(A) = 0{,}0000003$ и $\boldsymbol{P}(B) = 0{,}000006$ очень незначительны. Это показывает, что как в одном случае, так и в другом случае вероятность быть оштрафованным случайно ничтожно мала. Видимо, в эти дни работники милиции с большей требовательностью следят за соблюдением правил уличного движения.

8. ПРЕСТУПЛЕНИЕ РАСКРЫТО

В отдел уголовного розыска поступило сообщение о том, что 5 неизвестных лиц взломали сейф кассы колхоза и похитили крупную сумму денег. Свидетели успели заметить, что грабители сели в автобус, следующий по маршруту в соседний город. Об этом сразу же была поставлена в известность милиция. Как только автобус остановился на автовокзале, к его дверям подошел инспектор уголовного розыска и запретил кондуктору открывать дверь автобуса. Тот сообщил инспектору, что в автобусе 40 пассажиров. Обыск может привести к значительной задержке автобуса. Инспектор успокоил кондуктора: «Мне достаточно проверить человек 6 пассажиров и сможете ехать дальше!». Он предложил шестерым наугад выбранным пассажирам зайти в кабинет начальника вокзала.

Один преступник был сразу обнаружен — в его кармане нашли пачку денег. Он назвал сообщников, и дело было закончено.

Что руководило инспектором: риск или трезвый расчет? К этому вопросу мы вернемся после решения следующей задачи.

Пусть в ящике имеется n шаров: m белых и $n-m$ черных. Какова вероятность того, что среди r наудачу вынутых шаров окажется k белых?

Среди r шаров окажется k белых и $r-k$ черных. Поскольку белых шаров m, то k белых наугад может быть отобрано C_m^k способами. Соответственно, из $n-m$ черных $r-k$ черных шаров может быть отобрано C_{n-m}^{r-k} способами. Число выборок, благоприятствующих исследуемому событию, равно $C_m^k \cdot C_{n-m}^{r-k}$. Поскольку из n элементов группы по r элементов могут быть образованы C_n^r способами, то по формуле (4.1)

$$\boldsymbol{P}\,(\text{«среди } \boldsymbol{r} \text{ шариков } k \text{ белых»}) = \frac{C_m^k\, C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}. \qquad (9.2)$$

Это так называемое гипергеометрическое распределение. Использование его поможет объяснить действия инспектора по раскрытию преступления. Пусть событие A — «среди случайно вызванных 6 пассажиров есть хотя бы один преступник». Пусть событие A_i — «среди случайно вызванных 6 пассажиров есть i преступников» ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Тогда

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5.$$

Ясно, что

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(A_1) + \boldsymbol{P}(A_2) + \boldsymbol{P}(A_3) + \boldsymbol{P}(A_4) + \boldsymbol{P}(A_5).$$

По формуле (9.2)

$$\boldsymbol{P}(A_1) = \frac{C_5^1 \cdot C_{35}^5}{C_{40}^6} \approx 0{,}4192,$$

$$\boldsymbol{P}(A_2) = \frac{C_5^2 \cdot C_{35}^4}{C_{40}^6} \approx 0{,}1364,$$

$$\boldsymbol{P}(A_3) = \frac{C_5^3 \cdot C_{35}^3}{C_{40}^6} \approx 0{,}017,$$

$$\boldsymbol{P}(A_4) = \frac{C_5^4 \cdot C_{35}^2}{C_{40}^6} \approx 0{,}0008,$$

$$\boldsymbol{P}(A_5) = \frac{C_5^5 \cdot C_{35}^1}{C_{40}^6} \approx 0{,}00001.$$

Значит, $\boldsymbol{P}(A) \approx 0{,}5734$. Вероятность, что среди 6 пассажиров окажется по крайней мере один преступник, оказывается больше $\frac{1}{2}$.

По-видимому, инспектор умел пользоваться в необходимых случаях теорией вероятностей.

Гипергеометрическое распределение может с успехом использоваться во многих практических ситуациях: при исследовании распространения инфекционных заболеваний, при контроле качества изделий и т. д.

9. «СРАЖЕНИЕ»

Два мальчика играют в «сражение». У каждого из них 40 спичек. Бросается монета. При появлении герба откладывает в сторону спичку Толя — погиб его первый «солдат», при появлении цифры — то же самое делает Боря — погиб его «солдат». Игра продолжается до тех пор, пока у одного из них погибает последний «солдат».

Какова вероятность того, что при поражении одного из мальчиков у второго еще останется 20 спичек?

Это так называемая конкретизированная задача Банаха, которую для широкого круга читателей в свое время опубликовал известный польский математик Штейнгауз. Решим эту задачу Банаха в общем виде.

Пусть в двух коробках имеется по n спичек. Бросаем монету. При появлении герба удаляем одну спичку из 1-й коробки, при появлении цифры — одну спичку из 2-й коробки. Какова вероятность того, что при полном опустошении 1-й коробки во 2-й останется m спичек?

Пусть событие A — «при опустошении 1-й коробки во 2-й осталось m спичек».

Обозначим события:

B_1 — «спичка удалена из 1-й коробки»,

B_2 — «спичка удалена из 2-й коробки».

Поскольку подбрасываемая монета симметричная, $\boldsymbol{P}(B_1) = \boldsymbol{P}(B_2) = \frac{1}{2}$. Если при опустошении 1-й коробки во 2-й осталось m спичек, то при $2n - m$ бросаниях монеты n раз появился герб, $n - m$ раз цифра. Значит, событие B_1 произошло n раз при $2n - m$ испытаниях. По формуле (6.1)

$$\boldsymbol{P}(A) = C_{2n-m}^{n} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{n-m}} = C_{2n-m}^{n} \cdot \frac{1}{2^{2n-m}}.$$

По условиям игры мальчиков

$$\boldsymbol{P}(A) = C_{60}^{40} \cdot \frac{1}{2^{60}} \approx 0{,}01.$$

Как видно, шансов выиграть сражение с меньшими, чем у противника потерями, немного. Кстати, история не спичечных, а настоящих войн это подтверждает.

10. В ГОСТИ К ДЕДУШКЕ

В городе имеются 24 квартала (рис. 32). Вводим буквенные обозначения:

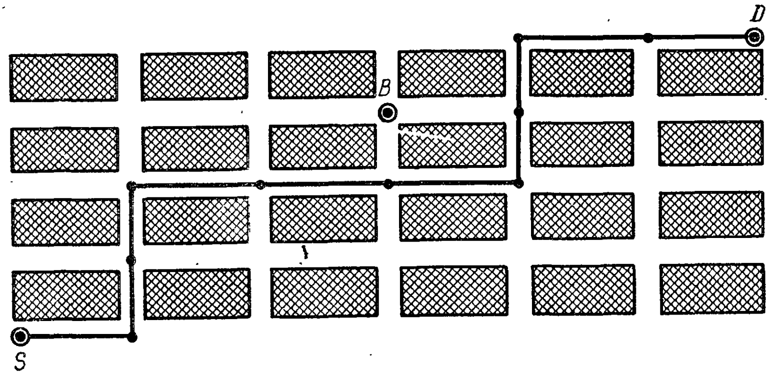

Рис. 32

S — вокзал, B — студенческое общежитие и D — дом дедушки. Из вагона вышел выпускник средней школы, мечтающий стать студентом вуза. Город ему незнаком, но он знает, что следует идти только вперед и повернуть можно только направо, тогда он попадет либо в общежитие, либо в дом дедушки. И в том и в другом случае ночлег обеспечен.

Какова вероятность того, что по пути к дедушке он пройдет и мимо общежития, если с одинаковой вероятностью может пойти прямо либо направо?

Решим задачу в общем виде.

Пусть в городе nk кварталов. Общежитие в плане города находится на перекрестке m-й горизонтали и l-й вертикали. Если событие A — «юноша нашел общежитие», то

$$P(A) = \frac{a}{b},$$

где b — число всевозможных маршрутов, по которым юноша может добраться до дедушкиного дома, a — число тех маршрутов, которые проходят мимо общежития.

Какой бы путь ни избрал наш знакомый, все равно ему придется пройти $n + k$ перекрестков (включая точку S, но не включая D). На каждом перекрестке он решает, идти ли ему прямо или повернуть направо. Те перекрестки, от которых он идет прямо, закодируем цифрой 1, а те, от которых — направо, цифрой 0. Тогда любой из маршрутов будущего студента будет закодирован выборкой из k единиц и n нулей. На рисунке 29 указанному маршруту соответствует выборка:

$$0110001100.$$

Число маршрутов от S до D — число перестановок с повторениями

$$b = P_{(k,\ n)} = \frac{(n+k)!}{n!\,k!}.$$

Число маршрутов, проходящих мимо общежития, равно произведению числа маршрутов от S до B и числа маршрутов от B до D.

Тогда

$$a = P_{(l,\ m)} \cdot P_{(n-l,\ k-m)} = \frac{(m+l)!\,(n+k-l-m)!}{m!\,l!\,(n-l)!\,(k-m)!}.$$

Поэтому

$$P(A) = \frac{(m+l)!\,(n+k-l-m)!\,n!\,k!}{(n+k)!\,m!\,l!\,(n-l)!\,(k-m)!}.$$

В нашем случае $n = 4$, $k = 6$, $l = 3$, $m = 3$.

Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = \frac{6!\ 4!\ 4!\ 6!}{10!\ 3!\ 3!\ 1!\ 3!} = \frac{8}{21}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Борель Э. Вероятность и достоверность. М., Физматгиз, 1961.

Вентцель Е. С. Теория вероятностей. 4-е изд. М., Наука, 1969.

Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М., Наука, 1969.

Володин Б. Г. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. М., Наука, 1968.

Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, 1961.

Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. 6-е изд. М., Наука, 1964.

Кордемский Б. А. Математика изучает случайности. М., Просвещение, 1975.

Математика в современном мире. М., Мир, 1967.

Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. М., Наука, 1975.

Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. М., Наука, 1968.

Розанов Ю. А. Лекции по теории вероятностей. М., Наука, 1968.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. М., Мир, 1967.

$$C_N^n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

Таблица 1

n \ N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2		1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
3			1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560
4				1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820
5					1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368
6						1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
7							1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
8								1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870
9									1	10	55	220	715	2002	5005	
10										1	11	66	286	1001	3003	
11											1	12	78	364	1365	
12												1	13	91	455	
13													1	14	105	
14														1	15	
15															1	

n \ N	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	136	153	171	190	210	231	253	276	300
3	680	816	969	1140	1330	1540	1771	2024	2300
4	2380	3060	3876	4845	5985	7315	8855	10626	12650
5	6188	8568	11628	15504	20349	26334	33649	42504	53130
6	12376	18564	27132	38760	54264	74613	100947	134596	177100
7	19448	31824	50388	77520	116280	170544	245157	346104	480700
8	24310	43758	75582	125970	203490	319770	490314	735471	1081575
9		48620	92378	167960	293930	497420	817190	1307504	2042975
10				184756	352716	646646	1144066	1961256	3268760
11						705432	1352078	2496144	4457400
12								2704156	5200300

n \ N	26	27	28	29	30	31	32
0	1	1	1	1	1	1	1
1	26	27	28	29	30	31	32
2	321	351	378	406	435	465	496
3	2600	2925	3276	3654	4060	4495	4960
4	14950	17550	20475	23751	27405	31465	35960
5	65780	80730	98280	118755	142506	169911	201376
6	230230	296010	376740	475020	593775	736281	906192
7	657800	888030	1184040	1560780	2035800	2629575	3365856
8	1562275	2220075	3108105	4292145	5852925	7888725	10518300
9	3124550	4686825	6906900	10015005	14307150	20160075	28048800
10	5311735	8436285	13123110	20030010	30045015	44352165	64512240
11	7726160	13037895	21474180	34597290	54627300	84672315	129024480
12	9657700	17383860	30421755	51895935	86493225	141120525	225792840
13	10400600	20058300	37442160	67863915	119759850	206253075	347373600
14			40116600	77558760	145422675	265182525	471435600
15					155117520	300540195	565722720
16							601080390

n \ N	33	34	35	36	37
0	1	1	1	1	1
1	33	34	35	36	37
2	528	561	595	630	666
3	5456	5984	6545	7140	7770
4	40920	46376	52360	58905	66045
5	237336	278256	324632	376992	435897
6	1107568	1344904	1623160	1947792	2324784
7	4272048	5379616	6724520	8347680	10295472
8	13884156	18156204	23535820	30260340	38608020
9	38567100	52451256	70607460	94143280	124403620
10	92561040	131128140	183579396	254186856	348330136
11	193536720	286097760	417225900	600805296	854992152
12	354317320	548354040	834451800	1251677700	1852482996
13	573166440	927983760	1476337800	2310789600	3562467300
14	818809200	1391975640	2319959400	3796297200	6107086800
15	1037158320	1855967520	3247943160	5567902560	9364199760
16	1166803110	2203961430	4059928950	7307872110	12875774670
17		2333606220	4537567650	8597496600	15905368710
18				9075135300	17672631900

n \ N	38	39	40	41	42
0	1	1	1	1	1
1	38	39	40	41	42
2	703	741	780	820	862
3	8436	9139	9880	10660	11480
4	73815	82251	91390	101270	111930
5	501942	575757	658008	749398	850668
6	2760681	3262623	3838380	4496388	5245786
7	12620256	15380937	18643560	22481940	26978328
8	48903492	61523748	76904685	95548245	118030185
9	163011640	211915132	273438880	350343565	445891810
10	472733756	635745396	847660528	1121099408	1471442973
11	1203322288	1676056044	2311801440	3159461968	4280561376
12	2707475148	3910797436	5586853480	7898654920	11058116888
13	5414950296	8122425444	12033222880	17620076360	25518731280
14	9669554100	15084504396	23206929840	35240152720	52860229080
15	15471286560	25140840660	40225345056	63432274896	98672427616
16	22239974430	37711260990	62852101650	103077446706	166509721602
17	28781143380	51021117810	88732378800	151584480450	254661927156
18	33578000610	62359143990	113380261800	202112640600	353697121050
19	35345263800	68923264410	131282408400	244662670200	446775310800
20			137846528820	269128937220	513791607420
21					538257874440

n \ N	43	44	45	46
0	1	1	1	1
1	43	44	45	46
2	903	946	990	1035
3	12 341	13 244	14 190	15 180
4	123 410	135 751	148 995	1 63 185
5	962 598	1 086 008	1 221 759	1 370 754
6	6 096 454	7 059 052	8 145 060	9 366 819
7	32 224 114	38 320 568	45 379 620	53 524 680
8	145 008 513	177 232 627	215 553 195	260 932 815
9	563 921 995	708 930 508	886 163 135	1 101 716 330
10	1 917 334 783	2 481 256 778	3 190 187 286	4 076 350 421
11	5 752 004 349	7 669 339 132	10 150 595 910	13 340 783 196
12	15 338 678 264	21 090 682 613	28 760 021 745	38 910 617 655
13	36 576 848 168	51 915 526 432	73 006 209 045	101 766 230 790
14	78 378 960 360	114 955 808 528	166 871 334 960	239 877 544 005
15	151 532 656 696	229 911 617 056	344 867 425 584	511 738 760 544
16	265 182 149 218	416 714 805 914	646 626 422 970	991 493 848 554
17	421 171 648 758	686 353 797 976	1 103 068 603 890	1 749 695 026 860
18	608 359 048 206	1 029 530 696 964	1 715 884 494 940	2 818 953 098 830
19	800 472 431 850	1 408 831 480 056	2 438 362 177 020	4 154 246 671 960
20	960 566 918 220	1 761 039 350 070	3 169 870 830 126	5 608 233 007 146
21	1 052 049 481 860	2 012 616 400 080	3 773 655 750 150	6 943 526 580 276
22		2 104 098 963 720	4 116 715 363 800	7 890 371 113 950
23				8 233 430 727 600

n \ N	47	48	49	50
0	1	1	1	1
1	47	48	49	50
2	1 081	1 128	1 176	1 225
3	16 215	17 296	18 424	19 600
4	178 365	194 580	211 876	230 300
5	1 533 739	1 712 304	1 906 884	2 118 760
6	10 737 573	12 271 512	13 983 816	15 890 700
7	62 891 499	73 629 072	85 900 584	99 884 400
8	314 457 495	377 348 994	450 978 066	536 878 650
9	1 362 649 145	1 677 106 640	2 054 455 634	2 505 433 700
10	5 178 066 751	6 540 715 896	8 217 822 536	10 272 278 170
11	17 417 133 617	22 595 200 368	29 135 916 264	37 353 738 800
12	52 251 400 851	69 668 534 468	92 263 734 836	121 399 651 100
13	140 676 848 445	192 928 249 296	262 596 783 764	354 860 518 600
14	341 643 774 795	482 320 623 240	675 248 872 536	937 845 656 300
15	751 616 304 549	1 093 260 079 344	1 575 580 702 584	2 250 829 575 120
16	1 503 232 609 098	2 254 848 913 647	3 348 108 992 991	4 923 689 695 575
17	2 741 188 875 414	4 244 421 484 512	6 499 270 398 159	9 847 379 391 150
18	4 568 648 125 690	7 309 837 001 104	11 554 258 485 616	18 053 528 883 775
19	6 973 199 770 790	11 541 847 896 480	18 851 684 897 584	30 405 943 383 200
20	9 762 479 679 106	16 735 679 449 896	28 277 527 346 376	47 129 212 243 960
21	12 551 759 587 422	22 314 239 266 528	39 049 918 716 424	67 327 446 062 800
22	14 833 897 694 226	27 385 657 281 648	49 699 896 548 176	88 749 815 264 600
23	16 123 801 841 550	30 957 699 535 776	58 343 356 817 424	108 043 253 365 600
24		32 247 603 683 100	63 205 303 218 876	121 548 660 036 300
25				126 410 606 437 752

Таблица 2

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$P_A(S_n = m) = \frac{k^m e^{-k}}{m!}$$

$m \diagdown k$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,359463	0,365913
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785	0,164661
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343	0,049398
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669	0,011115
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000695	0,001227	0,002001
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035	0,000081	0,000164	0,000300
7					0,000001	0,000003	0,000008	0,000019	0,000039
8								0,000002	0,000004

$m \diagdown k$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,367879	0,135335	0,049787	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,367879	0,270671	0,149361	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,183940	0,270671	0,224042	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,061313	0,180447	0,224042	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,015328	0,090224	0,168031	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,003066	0,036089	0,100819	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,000511	0,012030	0,050409	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,000073	0,003437	0,021604	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,000009	0,000859	0,008101	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,000001	0,000191	0,002701	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124007	0,131756
10		0,000038	0,000810	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11		0,000007	0,000221	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12		0,000001	0,000055	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13			0,000013	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14			0,000003	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15			0,000001	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16				0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17				0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18					0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19					0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20						0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21						0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22							0,000003	0,000022	0,000108
23							0,000001	0,000008	0,000042
24								0,000003	0,000016
25								0,000001	0,000006
26									0,000002
27									0,000001

$y = \Phi(x)$

x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$	x	$\psi(x)$
0,00	0,0000						
0,01	0,0040	0,13	0,0517	0,25	0,0987	0,37	0,1443
0,02	0,0080	0,14	0,0557	0,26	0,1026	0,38	0,1480
0,03	0,0120	0,15	0,0596	0,27	0,1064	0,39	0,1517
0,04	0,0160	0,16	0,0636	0,28	0,1103	0,40	0,1554
0,05	0,0199	0,17	0,0675	0,29	0,1141	0,41	0,1591
0,06	0,0239	0,18	0,0714	0,30	0,1179	0,42	0,1628
0,07	0,0279	0,19	0,0753	0,31	0,1217	0,43	0,1664
0,08	0,0319	0,20	0,0793	0,32	0,1255	0,44	0,1700
0,09	0,0359	0,21	0,0832	0,33	0,1293	0,45	0,1736
0,10	0,0398	0,22	0,0871	0,34	0,1331	0,46	0,1772
0,11	0,0438	0,23	0,0910	0,35	0,1368	0,47	0,1808
0,12	0,0478	0,24	0,0948	0,36	0,1406	0,48	0,1844
0,49	0,1879	1,02	0,3461	1,55	0,4394	2,16	0,4846
0,50	0,1915	1,03	0,3485	1,56	0,4406	2,18	0,4854
0,51	0,1950	1,04	0,3508	1,57	0,4418	2,20	0,4861
0,52	0,1985	1,05	0,3531	1,58	0,4429	2,22	0,4868
0,53	0,2019	1,06	0,3554	1,59	0,4441	2,24	0,4875
0,54	0,2054	1,07	0,3577	1,60	0,4452	2,26	0,4881
0,55	0,2088	1,08	0,3599	1,61	0,4463	2,28	0,4887
0,56	0,2123	1,09	0,3621	1,62	0,4474	2,30	0,4893
0,57	0,2157	1,10	0,3643	1,63	0,4484	2,32	0,4898
0,58	0,2190	1,11	0,3665	1,64	0,4495	2,34	0,4904
0,59	0,2224	1,12	0,3686	1,65	0,4505	2,36	0,4908
0,60	0,2257	1,13	0,3708	1,66	0,4515	2,38	0,4913
0,61	0,2291	1,14	0,3729	1,67	0,4525	2,40	0,4918
0,62	0,2324	1,15	0,3749	1,68	0,4535	2,42	0,4922
0,63	0,2357	1,16	0,3770	1,69	0,4545	2,44	0,4927
0,64	0,2389	1,17	0,3790	1,70	0,4554	2,46	0,4931
0,65	0,2422	1,18	0,3810	1,71	0,4564	2,48	0,4934
0,66	0,2454	1,19	0,3830	1,72	0,4573	2,50	0,4938
0,67	0,2486	1,20	0,3849	1,73	0,4582	2,52	0,4941
0,68	0,2517	1,21	0,3869	1,74	0,4591	2,54	0,4945
0,69	0,2549	1,22	0,3888	1,75	0,4599	2,56	0,4948
0,70	0,2580	1,23	0,3907	1,76	0,4608	2,58	0,4951
0,71	0,2611	1,24	0,3925	1,77	0,4616	2,60	0,4953
0,72	0,2642	1,25	0,3914	1,78	0,4625	2,62	0,4956
0,73	0,2673	1,26	0,3962	1,79	0,4633	2,64	0,4959
0,74	0,2703	1,27	0,3980	1,80	0,4641	2,66	0,4961
0,75	0,2734	1,28	0,3997	1,81	0,4649	2,68	0,4963
0,76	0,2764	1,29	0,4015	1,82	0,4656	2,70	0,4965
0,77	0,2794	1,30	0,4032	1,83	0,4664	2,72	0,4967
0,78	0,2823	1,31	0,4049	1,84	0,4671	2,74	0,4969
0,79	0,2852	1,32	0,4066	1,85	0,4678	2,76	0,4971
0,80	0,2881	1,33	0,4082	1,86	0,4686	2,78	0,4973
0,81	0,2910	1,34	0,4099	1,87	0,4693	2,80	0,4974
0,82	0,2939	1,35	0,4115	1,88	0,4699	2,82	0,4976
0,83	0,2967	1,36	0,4131	1,89	0,4706	2,84	0,4977
0,84	0,2995	1,37	0,4147	1,90	0,4713	2,86	0,4979
0,85	0,3023	1,38	0,4162	1,91	0,4719	2,88	0,4980
0,86	0,3051	1,39	0,4177	1,92	0,4726	2,90	0,4981
0,87	0,3078	1,40	0,4192	1,93	0,4732	2,92	0,4982
0,88	0,3106	1,41	0,4207	1,94	0,4738	2,94	0,4984
0,89	0,3133	1,42	0,4222	1,95	0,4744	2,96	0,4985
0,90	0,3159	1,43	0,4236	1,96	0,4750	2,98	0,4986
0,91	0,3186	1,44	0,4251	1,97	0,4756	3,00	0,49865
0,92	0,3112	1,45	0,4265	1,98	0,4761	3,20	0,49931
0,93	0,3238	1,46	0,4279	1,99	0,4767	3,40	0,49966
0,94	0,3264	1,47	0,4292	2,00	0,4772	3,60	0,499841
0,95	0,3289	1,48	0,4306	2,02	0,4783	3,80	0,499928
0,96	0,3315	1,49	0,4319	2,04	0,4793	4,00	0,499968
0,97	0,3340	1,50	0,4332	2,06	0,4803	4,50	0,499997
0,98	0,3365	1,51	0,4345	2,08	0,4812	5,00	0,49999997
0,99	0,3389	1,52	0,4357	2,10	0,4821		
1,00	0,3413	1,53	0,4370	2,12	0,4830		
1,01	0,3438	1,54	0,4382	2,14	0,4838		

ОТВЕТЫ

1. B, D и E. **2.** D. **3.** A — достоверное событие, D — невозможное событие. **4.** а) $A \subset C \subset B \subset D$; б) $A \subset B \subset C$. **5.** «Попадание 2 выстрелами». **6.** «По лотерее выиграно либо 10, либо 20, либо 25 руб.». **7.** «По лотерее выиграно не больше 4 руб.». **8.** «При подбрасывании двух монет появление хотя бы одного герба». **9.** «Мишень поражена не больше чем 100 выстрелами». **10.** «При бросании кости появилось не меньше 4 очков». **11.** U, V, U. **12.** «Попадания первыми двумя выстрелами». **13.** ABC — «появление 1 очка», AB — «появление либо 1, либо 5 очков», AC — «появление либо 1, либо 3 очков», BC — «появление либо 1, либо 2, либо 4, либо 6 очков». **18.** $A+B$ — «деталь либо I, либо II сорта», $\overline{A+C}$ — «деталь I сорта», $AC = V$, $AB + C = C$. **19.** а) $A = B$; б) $\overline{A} = V$; в) $\overline{A} = V$. **20.** Равенство (в) справедливо. **21.** а) A; б) $AB + BC + CA$; в) B. **22.** а) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; б) $A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$; в) $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$; г) ABC; д) $A + B + C$; е) $\overline{ABC}$. **26.** Появление 3 очков. **28.** а) Да; б) нет; в) да; г) да. **29.** Полная группа попарно несовместимых событий в случае (а). **30.** а) Да; б) нет. **32.** 303 600. **33.** C_{150}^{6}. **34.** 60. **35.** 36. **36.** 1512. **38.** 125. **39.** 43 200. **40.** C_{n-k+1}^{k}. **41.** 151 200. **42.** 151 200. **43.** 6006. **45.** 55. **46.** 6435. **47.** 35. **48.** 243. **49.** 16. **50.** Не больше 2^{32}. **51.** 729. **52.** 81. **53.** 2000. **54.** 31. **56.** 267 148. **57.** 1, 3, 11. **58.** 25. **59.** 66 660. **60.** 126. **61.** 17 760. **62.** 2048. **63.** 231. **64.** 518 184. **65.** C_{n-2}^{3}. **66.** 261. **67.** 283 824. **68.** 5 788 889. **69.** $\frac{1}{120}$. **70.** $P(A) = \frac{1}{216}$, $P(B) = \frac{1}{36}$, $P(C) = \frac{5}{54}$. **71.** $4^{-10} \cdot 12\,500$. **72.** $\frac{1}{27}$. **73.** 0,5. **74.** 0,42. **75.** 0,46. **76.** $\frac{1}{C_{32}^{8}}$. **77.** $C_n^1 \cdot \frac{n!}{n^n}$. **78.** $\frac{1}{55}$. **79.** 0,33. **80.** Неуклюжая. **81.** 0,3024. **82.** 0,00077. **83.** $\frac{60^2 - (60-\alpha)^2}{60^2}$. **84.** $\frac{80}{153}$. **85.** $\frac{49}{256}$. **86.** $(10!)^{-2}$. **87.** $\frac{1}{C_N^n} \times \left[C_M^{m+1} \cdot C_{N-M}^{n-m-1} + C_M^{m+2} \cdot C_{N-M}^{n-m-2} + \ldots + C_M^n C_{N-M}^0\right]$. **88.** $\frac{63}{64}$. **89.** $1 - \frac{(n-m)!\,(n-k)!}{n!\,(n-m-k)!}$. **90.** 0,106. **91.** $\frac{5}{36}$. **92.** $\frac{609}{625}$. **93.** $\frac{256}{715}$. **94.** $\frac{864}{1779}$. **95.** $\frac{44}{85}$. **96.** $\frac{7}{18}$. **97.** а) 0,5; б) 0,333; в) 0,167. **98.** а) 0,35; б) 0,4; в) 0,45; г) 0,45. **99.** 0,331. **100.** $2p - p^2$. **101.** $\frac{6}{7}$. **102.** $\frac{6}{13}$. **103.** $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. **104.** а) $1 - (1-p)^{10}$; б) $10p(1-p)^9$; в) $45p^2(1-p)^8$. **105.** а) 0,5814; б) 0,06965; в) 0,9942. **106.** 0,302. **107.** $\frac{19}{144}$. **108.** $p_{11}p_{22}p_{23} + p_{21}p_{12}p_{23} + p_{21}p_{22}p_{13}$. **109.** 3 из 4. **110.** а) 0,455; б) 0,468; в) 0,181. **111.** $\frac{1}{46}$. **112.** $C_m^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-k}$. **113.** $n \geqslant 70$. **114.** 0,2384. **115.** 0,491. **116.** 8. **117.** а) 0,254; б) 0,133; в) 0,167. **118.** $191 \leqslant n \leqslant 197$. **119.** 6. **120.** 23. **121.** $\frac{82}{91} \leqslant p \leqslant \frac{83}{91}$. **122.** 0,00012. **123.** $m \approx 600$. **124.** $m \approx 80$. **125.** 0,0132. **126.** 0,0017. **127.** Возможности почти равные. **128.** 0,036. **129.** 0,972. **130.** 0,009. **131.** 0,147. **132.** 55. **133.** а) 0,0101; б) 0,1089; в) 0,2541. **134.** 0,09. **135.** 0,9596. **136.** 0,997. **137.** а) 0,1353; б) 0,8572. **138.** а) $e^{-60}\left(\frac{60^{120}}{120!} + \frac{60^{121}}{121!} + \ldots + \frac{60^{10\,000}}{10\,000!}\right)$; б) $e^{-60}\left(\frac{60^0}{0!} + \frac{60}{1!} + \right.$

$+ \ldots + \left.\frac{60^{80}}{80!}\right)$. **139.** 86. **140.** 0,26. **141.** 0,985. **142.** 511. **143.** 0,96. **144.** 583. **145.** 576. **146.** 0,131. **147.** 0,9991. **148.** 0,929. **149** ≈ 1. **150.** Нет. **151.** 31 618. **152.** 0,00217. **153.** 3,5. **154.** 2,734. **155.** 3,15. **156.** 3—4. **157.** 10. **158.** 8; 4—5. **159.** 10. **160.** 0,938. **161.** $\frac{k}{p}$. **162.** 8, —1, 15, 75. **163.** Стоит. **164.** Не стоит. **165.** $\frac{263}{12}$, $-\frac{107}{12}$. **166.** 2. **167.** $D(\xi) = 4{,}79$. **168.** $M(\xi^2) = 328{,}8$. **169.** 10,03. **170.** 182,5. **171.** 4,9; 1,8. **172.** $\frac{2}{9}$. **173.** 1,2; 0,72. **174.** $\frac{5}{3}$; $\frac{10}{9}$. **175.** 0,48. **176.** 0,285. **177.** 0; n. **178.** 1; 1. **179.** 2,4; 1,99. **180.** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}4$. **181.** $-a$; $-a-1$; $2a-5$; b; b; $4b$. **182.** $X_1 = 1$; $X_2 = 2$; $X_3 = 3$; $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}5$. **183.** $\frac{3n}{8}$; $\frac{15n}{64}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{15}{64n}$. **184.** $\frac{4}{5}$; $\frac{9}{25}$. **185.** $\frac{ak}{a+b}$; $\frac{abk(a+b-k)}{(a+b)^2(a+b-1)}$. **186.** 0,1359. **187.** 0,6826. **188.** 0,8664. **189.** $\sigma = 1{,}0156$ мк. **190.** $p = 0{,}0456$. **191.** $n = 456$. **192.** 15 мк.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Витаутас Степанович Лютикас

ШКОЛЬНИКУ О ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Спец. редактор *В. Н. Березин*
Редакторы *Ж. П. Данилова* и *Л. В. Антонова*
Художник обложки *Б. Л. Николаев*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *Н. А. Киселева*
Корректоры *А. А. Гусельникова, О. В. Ивашкина*

ИБ № 7328

Сдано в набор 11.08.82. Подписано к печати 07.01.83. Формат 60×90$^{1}/_{16}$. Бумага тип. № 3 Гарнит лит. Печать высокая. Печ. л. 8,0. Усл. кр. отт. 8,25. Уч.-изд. л. 7,61. Тираж 78 500 экз.
Заказ 3286. Цена 20 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц Саратовского ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината в областной типографии управления издательств, полиграфии и книжной торговли Ивановского облисполкома, 153628, г. Иваново, ул. Типографская, 6.